# 对立统一

# 第1章

数和形的概念是从现实世界中抽象得来的.而现实世界中的数和形的表现形式又是千差万别的.而这种千差万别却无不为这些事物内部的矛盾所左右.

就一个数学等式来说,无论是从条件或结论来看,还是从等式的左右两边来看,它们都存在着不同之处,即差异.否则就构不成一个要加以证明的式子.例如

求证:$(a+b)^2-(c+d)^2+(a+c)^2-(b+d)^2=2(a-d)(a+b+c+d)$.

很明显上等式左右两边在运算上有差异,等式左边是和的运算,而右边是积的运算.又如

已知$\dfrac{x}{a^2-y^2}=\dfrac{y}{a^2-x^2}=\dfrac{1}{b}$,$xy=c^2$,

求证:$(a^2-c^2)^2-b^2c^2=0$ 或 $a^2+c^2-b^2=0$.

此题除了有运算上的差异之外,还有字母上的差异.在条件式中有字母 $a,b,c,x,y$,而在求证式中字母 $x,y$ 消失了.

如果我们把函数、映射也看作是运算的话，则一般说来，一个代数等式的条件式与求证式，求证式的左边和右边主要存在着两种差异：元素（字母等）和运算的差异.

“差异就是矛盾”.因此，对数学式子中的每一个差异都应把它看作客观矛盾的反映.它们既对立又统一.由于一个数学式子的左右两边存在着差异，因而是对立的，然而这些差异又被等号联系在一起，因而又是统一的.总之，要证明的任何一个数学等式都是一个对立的统一体.

就等式证明过程来说，它是对条件式（或等式的一边）经过恒等变形，转化到求证式（或等式的另一边）的过程；本质上说，等式证明的过程就是找出差异，消灭差异的过程；是一个由对立到统一的过程，合二而一的过程.因此，在解题时，我们要竭尽全力去了解数学式子中的差异的“每一个方面各占何等的特定的地位，何种具体形式和对方发生互相依存又相互矛盾的关系”.

例如第一个例子中，主要差异是运算上的差异，若恰当地使用平方差因式分解的公式，就可以使等式的左边转化为右边，而对于第二个例子，从条件式中消去$x$，$y$就是解决条件式与求证式的差异的具体途径.

由此可见，证明数学等式的过程，是一个找出差异，分析差异，解决差异的过程.不但要看到等式中的对立（差异）的一面，而且更重要的是要看到这些差异是怎样互相联系的.它们不但在一定的条件下共处于一个统一体中，而且在一定的条件下还可以相互转化.一个正确的思路在开始的时候就是可以判断的，只要看这种证明的路线是使等式中的差异在缩小，还是在

扩大. 若是前者，则一般可以认为，按照这样的思路做下去，原则上等式是可以证出来的.

由于代数等式中无论是条件和求证式的差异，还是一个等式两边的差异，大量地表现为运算上的差异. 这个特殊性也就规定了在代数等式的证明中熟练地、准确地掌握代数式的各种公式、法则就显得尤为重要了. 对于代数中的各种公式，也必须从字母以及运算的差异上去加以理解和记忆. 只有这样，才能灵活地解决问题. 关于这方面的论述，请读者参阅《三角等式证题法》(哈尔滨工业大学出版社，2015 年).

# 按图索骥

# 第2章

伯乐善相千里马的故事是众所周知的.伯乐想把自己相马的经验留给后世,写了一本《相马经》.伯乐的儿子读了《相马经》之后,知道额头突出是好马的一个标志.他就照着这个标志去找千里马.有一天,他见到一只大蛤蟆,他以为这就是好马了,高高兴兴地拿回家中,对他的爸爸说:"得一马,略与相同,但蹄不如累曲耳".伯乐知道自己的孩子愚笨,便风趣地说:"此马好跳,不堪御也".这就是按图索骥的故事.这个成语的原意是用来比喻办事拘泥于教条,只知局部,不知全体;只知表面,不知本质.而现在使用这个成语,用来比喻按照线索去寻找事物.意义和原来的不一样了.

代数等式的条件和结论,一个等式的左右两端终究会有一点线索相联系的(否则这个等式也就变得无法证明了).按照这个线索去寻找等式证明的思路,这就是按图索骥这个成语给我们的启示.为了找出线索,首先应分析等式中的不同点与相同

点，由此找出它们之间的联系. 然后用恰当的方法，消除不同点，保留相同点，达到证明的目的.

**例 1**　求证：$x(x-1)(x-2)(x-3)+1=(x^2-3x+1)^2$.

**分析**　等式左边是和，右边是积. 若从运算入手，可以将左边第一项全部乘开，合并同类项，然后再因式分解，配出一个完全平方式来. 这样做无疑是可行的. 但是如果我们注意到右边的二次三项式是 $x^2-3x+1$，按照这个线索将左边的第一项变为

$$\begin{aligned}&x(x-1)(x-2)(x-3)=\\&[x(x-3)][(x-1)(x-2)]=\\&(x^2-3x)(x^2-3x+2)=\\&[(x^2-3x+1)-1][(x^2-3x+1)+1]\end{aligned}$$

这样就构造出右边所需要的二次三项式来了. 这样做计算量显然会大量减少.

**证明**　左边 $=[(x^2-3x+1)-1][(x^2-3x+1)+1]+1=$

$(x^2-3x+1)^2-1+1=$

$(x^2-3x+1)^2=$

右边

**例 2**　求证

$$(ax-by)^2+(bx+ay)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

**分析**　左边是和，右边是积. 欲从左边证到右边，则应将左边化积. 但此两项并无公因式，故只能将左边两个因式展开合并，然后按右边的模式进行因式分解.

**证明**　左边 $=a^2x^2-2axby+b^2y^2+b^2x^2+2bxay+$

$a^2y^2=a^2x^2+b^2y^2+b^2x^2+a^2y^2=$

$a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)=$

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=$

右边

**例 3**　求证

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a)$$

**分析**　左边是和，右边是积.故应将左边化和为积.而这可采用提取公因式的方式解决.由于右边有因式 $a+b$，左边四项并没有公因式 $a+b$，因此，要按照提出因式 $a+b$(或 $b+c$ 等)的线索去处理左式.由于

$$-a^3-b^3=-(a^3+b^3)=-(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

因而左边的第二项、第三项合并后有 $a+b$ 的因式.由此可断定左边第一项、第四项合并后也应有 $a+b$ 因式.故将左边四项分成两组，先找出公因式 $a+b$，然后对余下的因式用同样的思想去进行分解.

**证明**　左边 $=[(a+b+c)^3-c^3]-(a^3+b^3)=$

$(a+b)[(a+b+c)^2+(a+b+c)c+c^2]-$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=$

$(a+b)[(a+b+c)^2+(a+b+c)c+$

$c^2-a^2-b^2+ab]=$

$(a+b)\{[(a+b+c)^2-a^2]+$

$(b+c)c-(b^2-c^2)+(ab+ac)\}=$

$(a+b)[(b+c)(2a+b+c)+(b+c)c-$

$(b+c)(b-c)+a(b+c)]=$

$(a+b)(b+c)[2a+b+c+c-b+c+a]=$

$(a+b)(b+c)(3a+3c)=$

$3(a+b)(b+c)(c+a)=$

右边

**例 4**　求证：$a^4+b^4+(a+b)^4=2(a^2+ab+b^2)^2$.

**分析**　两边都按乘法公式展开，即可以获得等式成立，但证明过程不够简捷.如果我们按右边 $a^2+ab+b^2$ 的因式的结构将 $(a+b)^4=[(a+b)^2]^2=(a^2+2ab+b^2)^2=$

$[(a^2+ab+b^2)+ab]^2=(a^2+ab+b^2)^2+2ab(a^2+ab+b^2)+a^2b^2$ 变为 $a^2+ab+b^2$ 的形式，然后再与右边比较，猜想上面展开式所余的部分与 $a^4+b^4$ 合并后也应是 $(a^2+ab+b^2)^2$. 而根据这三数和的平方公式则显然是成立的.

**证明**　左边 $=a^4+b^4+(a^2+ab+b^2+ab)^2=$
$a^4+b^4+a^2b^2+2ab(a^2+ab+b^2)+$
$(a^2+ab+b^2)^2=(a^2)^2+(b^2)^2+$
$(ab)^2+2(ab)a^2+2a^2b^2+$
$2(ab)b^2+(a^2+ab+b^2)^2=$
$(a^2+ab+b^2)^2+(a^2+ab+b^2)^2=$
$2(a^2+ab+b^2)^2=$
右边

**例 5**　求证

$$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

**分析**　因右边有因式 $a+b+c$，按照这个线索将左边的 $a+b$ 变为 $a+b+c-c$，然后展开得 $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(b+c)(c+a)-c(b+c)(c+a)$. 对 $-c(b+c)(c+a)+abc$ 同样处理，也可得到因式 $a+b+c$. 最终必得公因式 $a+b+c$.

**证明**　左边 $=(a+b+c)(b+c)(c+a)-$
$c(b+c)(c+a)+abc=$
$(a+b+c)(b+c)(c+a)-$
$c[(b+c)(c+a)-ab]=$
$(a+b+c)(b+c)(c+a)-$
$c^2(a+b+c)=$
$(a+b+c)[(b+c)(c+a)-c^2]=$
$(a+b+c)(ab+bc+ca)=$
右边

**例 6** 设 $a,b,c$ 是实数. 且 $1+bc\neq0,1+ca\neq0,1+ab\neq0$. 求证

$$\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-a}{1+ca}+\frac{a-b}{1+ab}=\frac{b-c}{1+bc}\cdot\frac{c-a}{1+ca}\cdot\frac{a-b}{1+ab}$$

**分析** 左边是商和,右边是商积,要解决这个和与积的差异,从分母比较中可以看出,对左边应该通分. 通分后,分子变为

$$(b-c)(1+ca)(1+ab)+(c-a)(1+bc)(1+ab)+(a-b)(1+bc)(1+ca)$$

与右边分子比较,应有 $b-c$(或 $c-a$ 等)的因式,按此线索对上述分子中的第二项的 $c-a$,将其变为 $c-b+b-a$,则第二项变为

$$-(b-c)(1+bc)(1+ab)-(a-b)(1+bc)(1+ab)$$

让后者与第三项合并,提取 $a-b$ 的因式后,在余因式中再分解出 $b-c$ 的因式来.

**证明** 因为

$$\begin{aligned}
&(b-c)(1+ca)(1+ab)+(c-a)(1+bc)(1+ab)+\\
&(a-b)(1+bc)(1+ca)=\\
&(b-c)(1+ca)(1+ab)-\\
&(b-c)(1+bc)(1+ab)-(a-b)(1+bc)(1+ab)+\\
&(a-b)(1+bc)(1+ca)=\\
&(b-c)[(1+ca)(1+ab)-(1+bc)(1+ab)]+\\
&(a-b)[(1+bc)(1+ca)-(1+bc)(1+ab)]=\\
&(b-c)(1+ab)[(1+ca)-(1+bc)]+\\
&(a-b)(1+bc)[(1+ca)-(1+ab)]=\\
&(b-c)(1+ab)(ca-bc)+(a-b)(1+bc)(ca-ab)=\\
&(b-c)(a-b)(c+abc)+(a-b)(c-b)(a+abc)=
\end{aligned}$$

$(b-c)(a-b)(c+abc-a-abc)=$

$(b-c)(a-b)(c-a)$

所以，左边＝右边.

**例 7**　求证

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1 \tag{1}$$

**分析**　左边是和，右边是积，故应通分. 通分后得

$$左边=\frac{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \tag{2}$$

因为右边是 1，故式(2)分子应进行因式分解，然后与分母约分. 因式分解也与前几个例子一样，按分母的“图”去“索骥”. 问题即不难解决.

**证明**　因为

$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)=$

$-a^2(b-c)+b^2(a-b)+b^2(b-c)+c^2(b-a)=$

$-(b-c)(a^2-b^2)+(a-b)(b^2-c^2)=$

$-(b-c)(a-b)(a+b)+(a-b)(b-c)(b+c)=$

$(b-c)(a-b)[-(a+b)+(b+c)]=$

$(b-c)(a-b)(c-a)$

故

$$左边=\frac{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=$$

$$\frac{(b-c)(a-b)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1=右边$$

**例 8**　当 $n\geqslant 2$ 时，求证

$$\frac{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}-2}{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}+2}=\frac{(n+1)\sqrt{n-2}}{(n-1)\sqrt{n+2}}$$

**分析** 左边是和商，右边是积商，故应将左边分子分母化积. 看分子，右边的分子有 $n+1$ 这个因式，还有 $\sqrt{n-2}$ 这个因式，而左边分子的第三项

$$(n^2-1)\sqrt{n^2-4}=(n-1)\sqrt{n-2}(n+1)\sqrt{n+2}$$

也有这个因式，故 $n^3-3n-2$ 应能分解出 $(n+1)\cdot\sqrt{n-2}$ 因式来. 事实上

$$\begin{aligned}n^3-3n-2=&(n+1)(n^2-n-2)=\\&(n+1)(n-2)(n+1)=\\&(n+1)^2(n-2)=\\&[(n+1)\sqrt{n-2}]^2\ (n\geqslant 2)\end{aligned}$$

对分母，也“按图索骥”，即可顺利地完成证明.

**证明** 左边 $=\dfrac{n^3-3n-2+(n+1)\sqrt{n-2}(n-1)\sqrt{n+2}}{n^3-3n+2+(n-1)\sqrt{n+2}(n+1)\sqrt{n-2}}=$

$$\frac{[(n+1)\sqrt{n-2}]^2+(n+1)\sqrt{n-2}(n-1)\sqrt{n+2}}{[(n-1)\sqrt{n+2}]^2+(n-1)\sqrt{n+2}(n+1)\sqrt{n-2}}=$$

$$\frac{(n+1)\sqrt{n-2}[(n+1)\sqrt{n-2}+(n-1)\sqrt{n+2}]}{(n-1)\sqrt{n+2}[(n-1)\sqrt{n+2}+(n+1)\sqrt{n-2}]}=$$

$$\frac{(n+1)\sqrt{n-2}}{(n-1)\sqrt{n+2}}=\text{右边}$$

对于条件等式的证明，不仅要考虑到求证式左边与右边的字母和运算的差异，而且要考虑到条件式与求证式之间的字母和运算的差异. 一般的做法是，将求证式的左边按右边的“图”采用条件式使其达到转化. 另一种就是将条件式经过恒等变形，使条件式与求证式之间的差异消失，从而达到证明的目的.

**例 9** 已知 $2b=a+c$，求证：$a^2+8bc=(2b+c)^2$.

**分析** 求证式左边有 $a$，右边没有 $a$；左边是和，右

边是积.为了证明求证式,可利用条件式解出 $a=2b-c$,代入求证式左边达到消灭 $a$ 的目的,然后再和化积即可.

**证明**　由条件式得 $a=2b-c$,代入求证式左边得

$$
\begin{aligned}
a^2+8bc=&(2b-c)^2+8bc=\\
&4b^2-4bc+c^2+8bc=\\
&4b^2+4bc+c^2=\\
&(2b+c)^2
\end{aligned}
$$

**例 10**　已知 $ab=1$,求证:$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}=1$.

**分析**　求证式左边是和,右边是积.按图索骥,应该将左边通分.因为右边不含分母,仅仅是数字 1,故猜想左边的分子分母应该一样.而通分后的分子是 $2ab+a+b$,要与分母约分,可将一个 $ab$ 用 1 代替,即可分解为 $(a+1)(b+1)$.当然也可以将分母展开,分子分母中的 $ab$ 都用条件式 $ab=1$ 代入,即可发现分子分母相同.

**证法 1**　
$$
\begin{aligned}
\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}=&\frac{ab+a+ba+b}{(a+1)(b+1)}=\\
&\frac{ab+a+b+1}{(a+1)(b+1)}=\\
&\frac{(a+1)(b+1)}{(a+1)(b+1)}=1
\end{aligned}
$$

**证法 2**　
$$
\begin{aligned}
\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}=&\frac{a}{\frac{1}{b}+1}+\frac{b}{b+1}=\\
&\frac{ab}{1+b}+\frac{b}{b+1}=\\
&\frac{ab+b}{b+1}=\frac{1+b}{b+1}=1
\end{aligned}
$$

**例 11**　已知 $bc=ad$,求证:$ab(c^2-d^2)=cd(a^2-b^2)$.

**分析**　求证式左边有 $c^2$,$d^2$,右边有 $a^2$,$b^2$.故应利用条件式,将左边的含 $c^2$ 的项变为含 $a^2$ 项.例如

$$abc^2=ac(bc)=ac(ad)=a^2cd$$

同样处理,将 $d^2$ 变为 $b^2$.

**证明**　$ab(c^2-d^2)=abc^2-abd^2=$

$$ac(bc)-bd(ad)=$$
$$ac(ad)-bd(bc)=$$
$$a^2cd-b^2cd=$$
$$cd(a^2-b^2)$$

**例 12**　已知 $a^2=b^2+c^2$,求证:$\frac{a+b+c}{c+a-b}=\frac{a+b-c}{b+c-a}$.

**分析**　求证式左边与右边都是分式.但分子分母各不相同.要证明两个分式相同,当然应该通分,在分母相同的情况下再去比较分子.而在证明本例时,可以对左边分子分母都乘以右边的分母 $b+c-a$.然后将分子展开,并利用条件凑出因式 $c+a-b$ 来.再将此因式约去后,即可达到右边的目的.

**证明**　左边$=\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{(c+a-b)(b+c-a)}=$

$$\frac{(b+c)^2-a^2}{(c+a-b)(b+c-a)}=$$
$$\frac{b^2+c^2+2bc-a^2}{(c+a-b)(b+c-a)}=$$
$$\frac{2bc}{(c+a-b)(b+c-a)}=$$
$$\frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{(c+a-b)(b+c-a)}=$$
$$\frac{a^2-(b-c)^2}{(c+a-b)(b+c-a)}=$$

$$\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(c+a-b)(b+c-a)}=$$

$$\frac{a+b-c}{b+c-a}=\text{右边}$$

**例 13**　已知 $x^2=y^2+z^2$，求证

$$(5x-3y+4z)(5x-3y-4z)=(3x-5y)^2$$

**分析**　求证式左边有 $z$，右边没有 $z$，故应将左边展开，利用条件式将 $z$ 消掉，然后合并同类项，最后和化积，即可完成证明.

**证明**　左边 $=(5x-3y)^2-16z^2=$

$$25x^2-30xy+9y^2-16(x^2-y^2)=$$

$$9x^2-30xy+25y^2=$$

$$(3x-5y)^2=\text{右边}$$

**例 14**　已知 $a+b+c=0$，求证

$$2a^2+bc=(b-a)(c-a)$$

**分析**　求证式左边是和，右边是积. 看右边，会想到左边应该可以分出 $b-a$ 或 $c-a$ 这个因式. 但左边没有见到这些公因式. 此时应利用条件式将 $bc$ 中的 $c$ 转化为 $a$ 和 $b$ 得

$$bc=b(-a-b)=-ab-b^2$$

并将 $2a^2$ 分别与 $-ab$，$-b^2$ 组合，则它们都可以提出因式 $b-a$ 来.

**证明**　$2a^2+bc=2a^2+b(-a-b)=$

$$a^2-ab+a^2-b^2=$$

$$a(a-b)+(a-b)(a+b)=$$

$$(a-b)(2a+b)=$$

$$(a-b)[a+(a+b)]=$$

$$(a-b)(a-c)=$$

$$(b-a)(c-a)$$

**例 15** 若 $a+b+c=0$,求证:$a^3+b^3+c^3=3abc$.

**分析** 此题若记得公式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=$$
$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \tag{3}$$

则求证式成立是明显的.若忘记了,如何直接证出此结果呢?我们看到,求证式左边是和,右边是积.故左边可以分出 $a$ 或 $b$ 或 $c$ 这些因式.而求证式左边三项,第一项有 $a$,故第二项、第三项合并后也应有 $a$.利用条件式得

$$b^3+c^3=(b+c)(b^2-bc+c^2)=-a(b^2-bc+c^2) \tag{4}$$

可见第二项、第三项确实可以分出因式 $a$ 来.对提取公因式 $a$ 后所剩余因式 $a^2-b^2-c^2+bc$,比较求证式的右边,它应等于 $3bc$,没有 $a$,故可利用条件式的变形 $a=-b-c$ 代入消去 $a$,然后得出 $b$ 和 $c$.

**证明** 左边 $=a^3+(b+c)(b^2-bc+c^2)=$
$a^3-a(b^2-bc+c^2)=$
$a(a^2-b^2-c^2+bc)=$
$a[(-b-c)^2-b^2-c^2+bc]=$
$a(b^2+c^2+2bc-b^2-c^2+bc)=$
$a(3bc)=3abc=$ 右边

**例 16** 已知 $a+b+c+d=0$,求证:$a^3+b^3+c^3+d^3=3(a+d)(b+d)(c+d)$.

**分析** 求证式左边是和,右边是积.看右边有因式 $a+d$ 或 $b+d$ 等,而左边 $a^3+d^3$ 有 $a+d$ 的因式.故可肯定 $b^3+c^3$ 也有 $a+d$ 的因式,而这可利用条件式转化 $b,c$ 成 $a,d$

$$b+c=-(a+d)$$

这样提取公因式 $a+d$ 即可实现.对余因式采用同样的方法去做.

**证明**　左边 $=(a+d)(a^2-ad+d^2)+$

$(b+c)(b^2-bc+c^2)=$

$(a+d)(a^2-ad+d^2)-$

$(a+d)(b^2-bc+c^2)=$

$(a+d)(a^2-ad+d^2-b^2-c^2+bc)=$

$(a+d)[(d^2-b^2)+(a^2-c^2)+bc-ad]=$

$(a+d)[(d+b)(d-b)+(a+c)(a-c)+$

$(b+d)c-d(a+c)]=$

$(a+d)[(d+b)(d-b)-$

$(d+b)(a-c)+(b+d)c+d(b+d)]=$

$(a+d)(b+d)[d-b+c-a+c+d]=$

$(a+d)(b+d)[2c+2d-(a+b)]=$

$(a+d)(b+d)[2(c+d)+(c+d)]=$

$3(a+d)(b+d)(c+d)=$ 右边

**例 17**　已知 $ab+bc+ca=1$，且 $|a|\neq 1$，$|b|\neq 1$，$|c|\neq 1$，求证

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}=\frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}$$

**分析**　　求证式左边是和，右边是积. 故应将左边通分，这样只需证左边通分后的分子

$a(1-b^2)(1-c^2)+b(1-a^2)(1-c^2)+c(1-a^2)(1-b^2)$

等于右边的分子 $4abc$ 即可. 比较它们之间的差异可知，若将 $b(1-a^2)(1-c^2)+c(1-a^2)(1-b^2)$ 合并应该可以提出 $a$ 的因式. $1-a^2$ 中并没有 $a$ 的因式，所以在 $b(1-c^2)+c(1-b^2)$ 中必有 $a$ 的因式，这只需利用条件式即可达到目的. 分解出因式 $a$ 后，余下的做同样处理.

**证明**　左边通分后的分子为

$a(1-b^2)(1-c^2)+b(1-a^2)(1-c^2)+$
$c(1-a^2)(1-b^2)=$
$a(1-b^2)(1-c^2)+(1-a^2)(b-bc^2+c-cb^2)=$
$a(1-b^2)(1-c^2)+(1-a^2)[(b+c)-bc(b+c)]=$
$a(1-b^2)(1-c^2)+(1-a^2)(b+c)(1-bc)=$
$a(1-b^2)(1-c^2)+(1-a^2)(b+c)(ab+ac)=$
$a(1-b^2)(1-c^2)+a(1-a^2)(b+c)^2=$
$a[1-b^2-c^2+b^2c^2+(b+c)^2-a^2(b+c)^2]=$
$a[1+2bc+b^2c^2-a^2(b+c)^2]=$
$a[1+2bc+b^2c^2-(ab+ac)^2]$
$a[1+2bc+b^2c^2-(1-bc)^2]=$
$a\cdot 4bc=4abc$

故求证式成立.

**例 18** 已知 $x-\frac{1}{x}=m, x^2-\frac{1}{x^2}=n$,求证

$$m^4+4m^2=n^2 \tag{5}$$

**分析** 已知式与求证式是有 $x$ 与没有 $x$ 的差异,故应该消去 $x$. 消去 $x$ 有许多办法. 例如由条件式可得

$$x-\frac{1}{x}=m, \left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=n \tag{6}$$

故

$$x+\frac{1}{x}=\frac{n}{m} \tag{7}$$

将式(6)中的第一式与式(7)相加可得 $x=\frac{n}{2m}+\frac{m}{2}$. 将此结果代入条件式之一,即可消去 $x$. 在此我们讲的是怎样能比较快地获得求证式. 由于条件式中的 $n,m$ 与求证式中的 $m,n$ 的差异是一次与二次的差异,故应先将这两个关系式两边平方,然后消去 $x$ 较好.

**证明**　由条件式可得

$$x-\frac{1}{x}=m \tag{8}$$

$$x+\frac{1}{x}=\frac{n}{m} \tag{9}$$

将式(8),(9)平方后可得

$$x^2+\frac{1}{x^2}-2=m^2 \tag{10}$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2=\frac{n^2}{m^2} \tag{11}$$

式(10)与式(11)相减得

$$4=\frac{n^2}{m^2}-m^2 \tag{12}$$

整理式(12)即得

$$m^4+4m^2=n^2 \tag{13}$$

**例 19**　已知 $x+\frac{9}{y}=3$, $y+\frac{9}{z}=3$,求证:$z+\frac{9}{x}=3$.

**分析**　条件式与求证式的差异在于有 $y$ 与没有 $y$,故应消去 $y$. 这样剩下的只是运算上的差异了.

**证明**　由条件式得

$$\frac{9}{y}=3-x \tag{14}$$

$$y=3-\frac{9}{z} \tag{15}$$

式(14),(15)相乘即得

$$9=(3-x)\left(3-\frac{9}{z}\right) \tag{16}$$

打开括号

$$9=9-3x-\frac{27}{z}+\frac{9x}{z} \tag{17}$$

合并后得

$$3x+\frac{27}{z}=\frac{9x}{z} \tag{18}$$

式(18)两边乘以$\frac{z}{3x}$得

$$z+\frac{9}{x}=3 \tag{19}$$

**例 20** 已知$\frac{y+z}{ay+bz}=\frac{z+x}{az+bx}=\frac{x+y}{ax+by}=k$,而且 $x+y+z\neq 0$,求证:$k=\frac{2}{a+b}$.

**分析** 条件式与求证式的差异是有 $x,y,z$ 与没有 $x,y,z$. 故应该根据这个线索消去 $x,y,z$. 显然,从条件式可得

$$x+y=k(ax+by)$$
$$y+z=k(ay+bz)$$
$$z+x=k(az+bx)$$

将其视为 $x,y,z$ 的线性方程组,解出 $x,y,z$ 用 $k,a,b$ 表示,然后再将这个结果代入原条件式之一,即可求得 $k,a,b$ 的一个关系式. 但这样做对于本题来说,过于繁杂了. 事实上,根据条件式与求证式之间的运算关系. 因为 $x+y+z\neq 0$,自然想到用等比定律,即可获得求证式.

**证明** 根据等比定律

$$k=\frac{(y+z)+(z+x)+(x+y)}{(ay+bz)+(az+bx)+(ax+by)}=$$
$$\frac{2(x+y+z)}{(a+b)(x+y+z)}=\frac{2}{a+b}$$

**例 21** 已知 $y=10^{\frac{1}{1-\lg x}}$,$z=10^{\frac{1}{1-\lg y}}$,求证:$x=10^{\frac{1}{1-\lg z}}$.

**分析** 条件式与求证式在字母上是有 $y$ 与没有 $y$

的差异.故应根据这个线索,从条件式中消去 $y$;从运算上看,条件式中的 $z$ 与求证式中的 $z$ 有对数运算之差异,故应对条件式取对数,然后再消去 $y$.

**证明**　由条件式取对数得

$$\lg y=\frac{1}{1-\lg x} \tag{20}$$

$$\lg z=\frac{1}{1-\lg y} \tag{21}$$

由式(21)得

$$\lg y=1-\frac{1}{\lg z} \tag{22}$$

由式(20),(22)得

$$\frac{1}{1-\lg x}=1-\frac{1}{\lg z}=\frac{\lg z-1}{\lg z} \tag{23}$$

故

$$1-\lg x=\frac{\lg z}{\lg z-1} \tag{24}$$

所以

$$\lg x=\frac{1}{1-\lg z} \tag{25}$$

于是

$$x=10^{\frac{1}{1-\lg z}} \tag{26}$$

**例 22**　已知 $m=a^x$,$n=a^y$,$m^y n^x=a^{\frac{2}{z}}$,求证:$xyz=1$.

**分析**　条件式是指数形式,求证式是对数式;条件式中有 $m$,$n$,求证式没有 $m$,$n$,故应将指数式化为对数式后,再消去 $m$,$n$.

**证明**

$$x=\log_a m \tag{27}$$

$$y=\log_a n \tag{28}$$

$$\frac{2}{z}=y\log_a m+x\log_a n \tag{29}$$

将式(27),(28)代入式(29),得

$$\frac{2}{z}=2xy \tag{30}$$

化简后得

$$xyz=1 \tag{31}$$

**例 23** 已知 $\log_2 3=a$, $3^b=7$,求证:$\log_{42}56=\frac{ab+3}{ab+a+1}$.

**分析** 条件式与求证式都是对数形式.但底数并不相同,故应该化为同底数的对数,若以 3 为对数的底数来统一本例,则条件式变为

$$\log_3 2=\frac{1}{a}, \log_3 7=b$$

此时求证式左边变为

$$\log_{42}56=\frac{\log_3 56}{\log_3 42}$$

因条件式是 2 与 7 关于 3 为底的对数.故 56 与 42 都应变为以素数 2,3 和 7 的标准分解式:$56=2^3\times 7$, $42=2\times 3\times 7$,这样利用对数运算法则,$\log_{42}56$ 就可以用 $\log_3 2$, $\log_3 7$ 的代数式来表达.再将 $\frac{1}{a}$ 及 $b$ 代入,化简即可.

**证明** 由条件式得

$$\log_3 2=\frac{1}{a}, \log_3 7=b$$

故

$$\log_{42}56=\frac{\log_3 56}{\log_3 42}=\frac{3\log_3 2+\log_3 7}{\log_3 2+\log_3 3+\log_3 7}=$$

$$\frac{3 \cdot \frac{1}{a}+b}{\frac{1}{a}+1+b}=\frac{3+ab}{1+a+ab}$$

**例 24**　已知 $a^m+a^n=a^p+a^q$，$a^{3m}+a^{3n}=a^{3p}+a^{3q}$，$a\neq 1$，求证：$m+n=p+q$.

**分析**　条件式是幂的形式和，求证式是指数和. 根据同底数的指数运算法则，求证式实际上是幂的积 $a^{m+n}=a^{p+q}$，即 $a^m \cdot a^n=a^p \cdot a^q$. 故条件式与求证式的差异主要是运算的差异. 因此应该从条件式中构造出幂的积来，怎样能得到幂的积呢？只有将第一个条件式乘方. 由于第二个条件式是 $a^{3m}$ 等形式，故应将第一条件式两边进行立方运算，再利用第二条件式化简，即可得到幂的积.

**证明**　由条件式得

$$(a^m+a^n)^3=(a^p+a^q)^3$$

故

$$a^{3m}+3a^{m+n}(a^m+a^n)+a^{3n}=a^{3p}+3a^{p+q}(a^p+a^q)+a^{3q}$$

利用两个条件式可得

$$3a^{m+n}(a^m+a^n)=3a^{p+q}(a^p+a^q)$$

$$a^{m+n}=a^{p+q}$$

因为 $a\neq 1$，所以

$$m+n=p+q$$

**例 25**　已知 $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$，求证：$a^2+b^2=1$.

**分析**　从运算上看，条件式中有根号，而求证式中没有，故可采用乘方的方式去掉条件式中的根号.

**证明**　由条件式得

$$a\sqrt{1-b^2}=1-b\sqrt{1-a^2} \tag{32}$$

式(32)两边平方得

$$a^2(1-b^2)=1-2b\sqrt{1-a^2}+b^2(1-a^2) \tag{33}$$

式(33)化简后得

$$2b\sqrt{1-a^2}=1+b^2-a^2 \tag{34}$$

再平方式(34)得

$$4b^2(1-a^2)=1+b^4+a^4+2b^2-2a^2-2a^2b^2 \tag{35}$$

式(35)合并同类项后得

$$a^4+b^4+1+2a^2b^2-2b^2-2a^2=0 \tag{36}$$

即

$$(a^2+b^2-1)^2=0 \tag{37}$$

所以

$$a^2+b^2=1 \tag{38}$$

## 练习题

1. 求证：$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2$.

2. 求证：$(a+b)^2-(c+d)^2+(a+c)^2-(b+d)^2=2(a-d)(a+b+c+d)$.

3. 求证：$(a^2+b^2)(ab+cd)-ab(a^2+b^2-c^2-d^2)=(ac+bd)(ad+bc)$.

4. 求证：$(a+b+c)^2-(a-b+c)^2+(a+b-c)^2-(a-b-c)^2=8ab$.

5. 求证：$(a+b)^2(b+c-a)(c+a-b)+(a-b)^2\cdot(a+b+c)(a+b-c)=4abc^2$.

6. 求证：$abc=\frac{1}{6}[(a+b+c)^3+2(a^3+b^3+c^3)-$

$3(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)]$.

7. 求证：$(a+b+c)^3+(b-a-c)^3+(c-a-b)^3+(a-b-c)^3=24abc$.

8. 求证：$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}$.

9. 已知：$2b=a+c$，求证：$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)=\frac{2}{9}(a+b+c)^3$.

10. 已知：$a+b+c=0$，求证：$2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2$.

11. 已知：$a+b+c=0$，$d+e+f=0$，求证：$\frac{a^3+b^3+c^3}{d^3+e^3+f^3}=\frac{abc}{def}$.

12. 已知：$a+b+c+d=0$，求证：$a^3+b^3+c^3+d^3=3(abc+bcd+cda+dab)$.

13. 已知：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$，求证：$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$.

14. 求证：$\left(\frac{1}{y-z}\right)^2+\left(\frac{1}{z-x}\right)^2+\left(\frac{1}{x-y}\right)^2=\left(\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}+\frac{1}{x-y}\right)^2$.

（13 题、14 题提示：若$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$，则 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$）

15. 已知：$ax^2+bxy+cy^2=1$，$cx^2+bxy+ay^2=1$，$x+y=1$，$c\neq a$，求证：$a+b+c=4$.

16. 已知：$b^2=ac$，$2x=a+b$，$2y=b+c$，求证：$\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2$.

17. 已知：$2b=a+c$，$2y=x+z$，$\left(\frac{b}{y}\right)^2=\frac{a}{x}\cdot\frac{c}{z}$，求证：$\frac{x}{z}+\frac{z}{x}=\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$.

18. 已知：$\log_{2a}a=x$，$\log_{3a}2a=y$，求证：$2^{1-xy}=3^{y-xy}$.

19. 已知：$\log_8 9=a$. $\log_2 5=b$，求证：$\lg 2=\frac{1}{b+1}$；$\lg 3=\frac{3a}{2(b+1)}$；$\lg 5=\frac{b}{b+1}$.

20. 已知：$a^2+b^2=7ab$，求证：$\log_k\frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}(\log_k a+\log_k b)$.

21. 已知：$\frac{a}{c}=\sin\theta$，$\frac{b}{c}=\cos\theta$，$a^a=(c+b)^{c-b}=(c-b)^{c+b}$，求证：$(\lg a)^2=\lg(c+b)\lg(c-b)$.

22. 设 $a$，$b$ 为实数，且 $a^2+b^2=a^2b^2$，$ab+2<0$，求证：$\frac{\left(a\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}+b\sqrt{1-\frac{1}{b^2}}\right)^2}{ab(ab+2)}=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2$.

# 量体裁衣

第3章

在条件等式的证明中，通常有两种途径：一种是将条件逐次代入求证式的一边，这样就将求证式的一边逐步化为另一边；一种是将条件式恒等变形，逐步达到消灭条件式与求证式之间的字母和运算的差异，最终得到求证式，这就是完成条件式证明的一般思路．不言而喻，对具体问题来说，应该采用适合这类题的具体方法去变换条件，只有这样，才能使证明过程合理、简捷．

有些等式的证明题，其形状是繁杂的（如繁分式等），在这样的情况下将求证式化整为零，最后聚零为整，就会显示出很多优越性来．正如拿一块布做一件衣服，如果不进行剪裁，是做不成一件合身的衣服的．然而裁衣必须量体，这样才能使做出的衣服得体．而根据不同的体型去合理地剪裁，对一个做衣服的人来说是至关重要的．同样的道理，在证明等式中，如果会对条件按照求证式进行合理的“剪裁”，对顺利地完成证明也同样是十分重要的．

**例 1** 当 $x=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$，$0<k<1$ 时，求证

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+1}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}}=\sqrt{1-k}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

**分析** 等式左边有 $x$，右边没有 $x$，因此将 $x=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$ 代入求证式左边，化简后即可获得右边. 但这样做必然使算式繁杂，故应分块计算（分片剪裁）：先算 $1-x^2$，再算 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+1$ 和 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1$，然后代入求证式左边.

**证明** 因为

$$x=\frac{2\sqrt{k}}{1+k} \tag{1}$$

所以

$$1-x^2=\frac{(1-k)^2}{(1+k)^2} \tag{2}$$

故

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+1=\frac{|1+k|}{|1-k|}+1=\frac{1+k}{1-k}+1=\frac{2}{1-k} \tag{3}$$

（因为 $0<k<1$）

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1=\frac{1+k}{1-k}-1=\frac{2k}{1-k} \tag{4}$$

将式(3)，(4)代入求证式左边，得

$$\text{左边}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{2}{1-k}}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{2k}{1-k}}}=\sqrt{1-k}+\frac{\sqrt{1-k}}{\sqrt{k}}=$$

$$\sqrt{1-k}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=\text{右边} \tag{5}$$

**例 2**　当 $a>0$，$b>0$ 且 $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$时，求证

$$\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}=a+b$$

**分析**　求证式左边有 $x$，右边没有 $x$，故应消去 $x$. 又求证式的分子分母中都有 $\sqrt{1+x^2}$，故应由条件式先“裁出”$\sqrt{1+x^2}$来. 另外我们看到，如果将求证式左边的分子分母同乘以一个 $\sqrt{1+x^2}-x$ 的因式，因为分母变成了 1，左边由分式变为整式，这样也就解决了求证式的整式与分式的差异. 因此本题宜先将分母有理化，再将求出的 $\sqrt{1+x^2}$ 代入左边较好.

**证明**　为了便于计算，我们先把条件变为 $x=\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$，则有

$$1+x^2=1+\frac{(a-b)^2}{4ab}=\frac{(a+b)^2}{4ab},\ \sqrt{1+x^2}=\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \tag{6}$$

将式(6)代入求证式左边得

$$\begin{aligned}
\text{左边}&=2a\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=\\
&2a(1+x^2)-2ax\sqrt{1+x^2}=\\
&2a\cdot\frac{(a+b)^2}{4ab}-2a\cdot\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}\cdot\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}=\\
&\frac{1}{2b}\left[(a+b)^2-(a^2-b^2)\right]=\\
&\frac{1}{2b}(2b^2+2ab)=a+b=\text{右边}
\end{aligned}$$

**例 3**　当 $a>b>0$ 且 $x=\sqrt{ab}$时，求证

$$\sqrt{\frac{\sqrt{(a-x)(x-b)}+\sqrt{(a+x)(x+b)}}{\sqrt{(a+x)(x+b)}-\sqrt{(a-x)(x-b)}}}=\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$$

**分析**　根据求证式我们可以先将左边根式内的

$$(a-x)(x-b),(a+x)(x+b)$$

裁出来.

$$(a-x)(x-b)=(a-\sqrt{ab})(\sqrt{ab}-b)=$$
$$\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$$
$$(a+x)(x+b)=\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

所以要这样做，是因为求证式左边是和差之商.而右边是积商，这样“裁法”便于左边分子分母提取公因式而达到约分化简的目的.

**证明**　$\sqrt{(x-a)(b-x)}=\sqrt[4]{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$(因为 $a>b$)

$$\sqrt{(a+x)(x+b)}=\sqrt[4]{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \tag{7}$$

将式(7)代入求证式得

$$左边=\sqrt{\frac{\sqrt[4]{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})+\sqrt[4]{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt[4]{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt[4]{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}}=$$
$$\sqrt{\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a}+\sqrt{b}}}=$$
$$\sqrt{\frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{b}}}=\sqrt[4]{\frac{a}{b}}=右边$$

**例 4**　若 $abc=1$，求证

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=1$$

**分析**　求证式左边是和，右边是积.按我们通常的想法是将左边通分，然后将分子分母利用条件式

$abc=1$化简，最后约分，这样做固然是对的，但计算是较繁杂的.将求证式左边的第一项中的字母与条件式相比，我们看到，若将此式的分子分母同乘以 $c$，并利用条件 $abc=1$ 后，第一个分式的分母就与第三个分式的分母相同了.继续这样的“剪裁”，最终可将左边的三项的分母都化为同分母了，并且计算量也大为减小了.

**证明**　左边$=\dfrac{ac}{c(ab+a+1)}+\dfrac{b}{bc+b+1}+\dfrac{c}{ca+c+1}=$

$$\frac{ac}{1+ca+c}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=$$

$$\frac{ac+c}{ca+c+1}+\frac{abc}{ac(bc+b+1)}=$$

$$\frac{ac+c}{ca+c+1}+\frac{1}{c+1+ac}=$$

$$\frac{ca+c+1}{ca+c+1}=1=\text{右边}$$

**例 5**　已知$\dfrac{x}{y+z}=a$，$\dfrac{y}{z+x}=b$，$\dfrac{z}{x+y}=c$ 且 $x+y+z\neq0$，求证：$\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}=1$.

**分析**　从求证式来看，理应将左边通分，然后将 $a$，$b$，$c$ 用 $x$，$y$，$z$ 表示代入化简.然而如果我们先根据条件式裁出$\dfrac{a}{1+a}$，$\dfrac{b}{1+b}$，$\dfrac{c}{1+c}$，则计算将会简单得多.

由 $a=\dfrac{x}{y+z}$ 变为 $\dfrac{a}{1+a}$，可利用比例的性质$\left(\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{a}\Rightarrow\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{c}{c+d}\right)$.

因为

$$x+y+z\neq0$$

所以

$$\frac{a}{1+a}=\frac{x}{x+y+z}$$

同样可求得

$$\frac{b}{1+b},\frac{c}{1+c}$$

**证明** 因为

$$a=\frac{x}{y+z},b=\frac{y}{z+x},c=\frac{z}{x+y}$$

所以

$$\frac{a}{1+a}=\frac{x}{x+y+z},\frac{b}{1+b}=\frac{y}{x+y+z},\frac{c}{1+c}=\frac{z}{x+y+z}$$

将诸式代入求证式左边得

$$左边=\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+z}+\frac{z}{x+y+z}=$$

$$\frac{x+y+z}{x+y+z}=1=右边$$

**例 6** 若 $aby\neq 0$，有 $\frac{b^2+bx+x^2}{a^2+ay+y^2}=\frac{b^2-bx+x^2}{a^2-ay+y^2}$，求证

$$\frac{x}{a}=\frac{b}{y}或\frac{x}{b}=\frac{y}{a}$$

**分析** 求证式等价于求证 $\left(\frac{x}{a}-\frac{b}{y}\right)\left(\frac{x}{b}-\frac{y}{a}\right)=0$. 即只需证明 $(xy-ab)(ax-by)=0$ 即可. 为了获得求证式，则可将条件式去分母，乘开，合并同类项，最后因式分解即可. 但根据条件式的左边与右边的许多相同点来看，利用等比律

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$$

可将条件裁剪成更有利的形式

$$\frac{(b^2+bx+x^2)+(b^2-bx+x^2)}{(a^2+ay+y^2)+(a^2-ay+y^2)}=$$
$$\frac{(b^2+bx+x^2)-(b^2-bx+x^2)}{(a^2+ay+y^2)-(a^2-ay+y^2)}$$

即

$$\frac{b^2+x^2}{a^2+y^2}=\frac{bx}{ay}$$

然后再去分母，化简，因式分解．这样就减小了计算量．

**证明**　因为

$$\frac{b^2+x^2}{a^2+y^2}=\frac{bx}{ay}$$

所以

$$ab^2y+ax^2y=a^2bx+bxy^2$$

移项，变号让右边为 0，分组合并

$$xy(ax-by)+ab(by-ax)=0$$

因式分解

$$(xy-ab)(ax-by)=0$$

即

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{b}{y}\right)\left(\frac{x}{b}-\frac{y}{a}\right)=0$$

故

$$\frac{x}{a}=\frac{b}{y}\quad \text{或}\quad \frac{x}{b}=\frac{y}{a}$$

以下的例题是数字组成的等式，要证明这种等式除了要仔细计算之外，更需要根据题中的数字特点去“量体裁衣”，找出合理而又简捷的证法．

**例 7**　求证

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2} \tag{8}$$

**分析** 除了运算上有明显差异外，一个突出的差异是等式左边有复合根式$\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$，而右边没有这样的根式.因此要证出式(8)，一定要根据$\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$这个“体”裁出它的完全平方式的“衣”来.即要找出两个非负数$x_1$和$x_2$，满足

$$(\sqrt{x_1})^2+(\sqrt{x_2})^2=x_1+x_2=2$$

$$2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}=\sqrt{3}$$

因此，复合根式可化为简单根式

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{x_1+x_2\pm2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}}=$$

$$\sqrt{(\sqrt{x_1}\pm\sqrt{x_2})^2}=|\sqrt{x_1}\pm\sqrt{x_2}|$$

故有

$$\begin{cases}x_1+x_2=2\\ x_1x_2=\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

根据二次方程的根与系数的关系，可知$x_1$和$x_2$是方程

$$x^2-2x+\frac{3}{4}=0$$

的两个根.解此方程得$x_1=\dfrac{3}{2}$，$x_2=\dfrac{1}{2}$.将此结果代入化简后的式子，再分母有理化，化简等，即可完成证明.

**证明** 因为

$$\sqrt{2\pm\sqrt{3}}=|\sqrt{x_1}\pm\sqrt{x_2}|=\left|\sqrt{\frac{3}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right|=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}\pm1)$$

所以

$$\text{左边}=\frac{2+\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)+\sqrt{2}}+\frac{2-\sqrt{3}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)+\sqrt{2}}=$$

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(3+\sqrt{3})}+\frac{2-\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(3-\sqrt{3})}=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{6}[(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})]=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{6}[3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}]=\sqrt{2}=\text{右边}$$

## 练习题

1. 当 $m>n$ 时，求证

$$\frac{m+n+\sqrt{m^2-n^2}}{m+n-\sqrt{m^2-n^2}}=\frac{m+\sqrt{m^2-n^2}}{n}$$

2. 当 $x=\frac{2ab}{b^2+1}$，$a>0$，$b>1$ 时，求证

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=b$$

3. 当 $x=\frac{\sqrt{\frac{2a}{b}-1}}{a}$，$0<a<b<2a$ 时，求证

$$\frac{(1-ax)\sqrt{1+bx}}{(1+ax)\sqrt{1-bx}}=1$$

4. 求证：$\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$.

# 第4章 殊途同归

我们发现，有些等式的证明若一定要从一边化到另一边是比较困难的，特别是当求证式的左边与右边就字母或运算的差异不太明显时，难度就更大一些；另外当我们从一边往另一边变换时，有时很难找到一个比较适当的变换目标. 在这种情况下，仍坚持从一边化到另一边往往十分勉强. 此时，对求证式两边同时往某一个目标进行恒等变换，则往往是可取的. 根据等量公理：若 $a=c$，$b=c$，则$a=b$. 这就是上述做法的依据. 成语“殊途同归”的意思是指从不同的道路走到同一目的地. 我们将求证的两边按同一个模式(设计某个或某些字母及运算为目标)去进行变化，最后根据等量公理，即可证得求证式成立. 我们把这种推证方法叫作“殊途同归”.

**例 1**　若 $x=\dfrac{a-b}{a+b}$，$y=\dfrac{b-c}{b+c}$，$z=\dfrac{c-a}{c+a}$，求证

$$(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$$

**分析**　求证式左边与右边的字母及运算并无显著差异，左边与右边都是含 $x$，$y$，

$z$ 的积的代数式. 此时,可以将条件式分别代入求证式的两边,同时按同一模式(例如含 $a,b,c$ 的积的代数式)化简.

**证明**　左边$=\left(1+\frac{a-b}{a+b}\right)\left(1+\frac{b-c}{b+c}\right)\left(1+\frac{c-a}{c+a}\right)=$

$$\frac{2a}{a+b}\cdot\frac{2b}{b+c}\cdot\frac{2c}{c+a}=$$

$$\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

右边$=\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)\left(1-\frac{b-c}{b+c}\right)\left(1-\frac{c-a}{c+a}\right)=$

$$\frac{2b}{a+b}\cdot\frac{2c}{b+c}\cdot\frac{2a}{c+a}=$$

$$\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

所以左边=右边.

**例 2**　设 $x+y+z=0$,求证

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\cdot\frac{x^5+y^5+z^5}{5}=\frac{x^7+y^7+z^7}{7}$$

**分析**　求证式的左边是和积,右边也可视为和 $\frac{a^7+y^7+z^7}{7}$ 与 1 的积. 故从字母与运算来看,并无显著差异. 此时若从条件式得 $z=-(x+y)$,代入求证式左边及右边,进行合并同类项,化简,使左、右两边都变为含 $x,y$ 的多项式. 再进行比较,问题即可获得解决.

**证明**　因为

$$x+y+z=0$$

所以

$$z=-(x+y)$$

则

左边$=\dfrac{x^2+y^2+(x+y)^2}{2}\cdot\dfrac{x^5+y^5-(x+y)^5}{5}=$

$\dfrac{2x^2+2y^2+2xy}{2}\cdot\dfrac{-5x^4y-10x^3y^2-10x^2y^3-5y^4}{5}=$

$(x^2+y^2+xy)(-x^4y-2x^3y^2-2x^2y^3-y^4)=$

$-(x^4y+2x^3y^2+2x^2y^3+y^4)(x^2+xy+y^2)$

根据多项式乘多项式的算式

$$\begin{array}{r}
1+2+2+1\phantom{+3+1}\\
1+1+1\phantom{+1+3+1}\\
\hline
1+2+2+1\phantom{+3+1}\\
1+2+2+1\phantom{+1}\\
1+2+2+1\\
\hline
1+3+5+5+3+1
\end{array}$$

即得

左边$=-(x^6y+3x^5y^2+5x^4y^3+5x^3y^4+3x^2y^5+xy^6)$

右边$=\dfrac{x^7+y^7-(x+y)^7}{7}=$

$\dfrac{-7x^6y-21x^5y^2-35x^4y^3-35x^3y^4-21x^2y^5-7xy^6}{7}=$

$-(x^6y+3x^5y^2+5x^4y^3+5x^3y^4+3x^2y^5+xy^6)$

所以左边=右边.

**例 3** 求证

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}=$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

**证明** 左边$=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left[1+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right]=$

$\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left[\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}-\dfrac{6+2\sqrt{5}}{4}\right]=$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)=0$$

$$\text{右边}=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left[1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right]=$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}-\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right]=0$$

所以左边=右边.

**例 4**　已知 $2b=a+c$,求证

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)=\frac{2}{9}(a+b+c)^3$$

**分析**　本题可用两边化简的方式证明.当然,在化简时应该有个想法.譬如,根据条件 $2b=a+c$,即知 $a+b+c=3b$.这样右边就变为$\frac{2}{9}(3b)^3=6b^3$.根据这个"图",我们可以利用条件 $2b=a+c$,将左边字母都变为 $b$ 的代数式,最后化简即可达到目的.

**证明**　因为

$$2b=a+c$$

所以

$$a+b+c=3b$$

故

$$\text{右边}=\frac{2}{9}(3b)^3=6b^3$$

$$\begin{aligned}\text{左边}=&a^2b+a^2c+b^2\cdot 2b+c^2a+c^2b=\\&(a^2+c^2)b+ac(c+a)+2b^3=\\&(a^2+c^2)b+2acb+2b^3=\\&(a^2+c^2+2ac)b+2b^3=\\&(a+c)^2b+2b^3=\\&4b^2\cdot b+2b^3=6b^3\end{aligned}$$

所以左边=右边.

**例 5** 若

$$x^2-yz=a \tag{1}$$

$$y^2-zx=b \tag{2}$$

$$z^2-xy=c \tag{3}$$

$$ax+by+cz=d \tag{4}$$

求证:$d^2=a^3+b^3+c^3-3abc$.

**分析** 可将求证式的左边与右边都用 $x,y,z$ 表示,然后化简.

左边$=(ax+by+cz)^2=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2$

$$\text{右边}=(x^2-yz)^3+(y^2-zx)^3+(z^2-xy)^3-3(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy) \tag{5}$$

若将式(5)展开将有 20 项,合并同类项后只有 10 项,与左边展开式的 10 项比较,即可得到求证式成立. 这样做计算量将会大些. 为此我们利用公式

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=$$
$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=$$
$$\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$$

故

$$\text{左边}=\frac{1}{4}(x+y+z)^2[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]^2$$

$$\text{右边}=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

由条件式(1),(2),(3)可得

$$a+b+c=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2] \tag{6}$$

$$a-b=(x+y+z)(x-y) \tag{7}$$

$$b-c=(x+y+z)(y-z) \tag{8}$$
$$c-a=(x+y+z)(z-x) \tag{9}$$

式(7),(8),(9)代入求证式右边,问题即获解决.

**证明**　左边 $=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2=$

$$\frac{1}{4}(x+y+z)^2[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]^2$$

右边 $=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=$

$$\frac{1}{4}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\cdot$$
$$[(x+y+z)^2(x-y)^2+(x+y+z)^2(y-z)^2+(x+y+z)^2(z-x)^2]=$$
$$\frac{1}{4}(x+y+z)^2[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]^2$$

所以左边=右边.

**例 6**　求证:

$$(1+x+x^2+\cdots+x^n)^2-x^n=(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})(1+x+x^2+\cdots+x^{n+1}). \tag{10}$$

**证明**　若 $x=1$,则式(10)显然成立.

若 $x\neq 1$,则

左边 $=\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^2-x^n=$

$$\frac{x^{2n+2}-2x^{n+1}+1-x^n(x^2-2x+1)}{(1-x)^2}=$$
$$\frac{x^{2n+2}-x^{n+2}-x^n+1}{(1-x)^2}$$

右边 $=\frac{1-x^n}{1-x}\cdot\frac{1-x^{n+2}}{1-x}=\frac{(1-x^n)(1-x^{n+2})}{(1-x)^2}=$

$$\frac{x^{2n+2}-x^{n+2}-x^n+1}{(1-x)^2}$$

所以左边=右边.

# 倒果为因

## 第5章

在等式证明的方法中，分析法是一种十分有效的证明方法. 所谓分析法，就是先承认求证式成立，然后根据公式以及运算法则进行恒等变形，直到获得一个简单明了成立的等式，或是用已知的条件式即可推得的明显结果. 若这样的推理过程每一步都是可逆的，则顺着原来经过的路线，就可推得求证式的成立. 这种倒果为因的方法，是发现证明的有力杠杆. 原则上讲，所有的等式证明乃至不等式的证明，使用这种倒果为因的分析法，总是行之有效的.

**例 1** 求证：

$$\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{1+2\sqrt{3}}}+\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{1+2\sqrt{3}}}=\sqrt{2}\times\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}-1}.$$

**证明**

$$\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{1+2\sqrt{3}}}+\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{1+2\sqrt{3}}}=\sqrt{2}\times\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}-1}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{1+2\sqrt{3}}}+\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{1+2\sqrt{3}}}\right)^2=$$

$\left(\sqrt{2}\times\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}-1}\right)^2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{5}+2\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{1+2\sqrt{3}}}\times\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{1+2\sqrt{3}}}=$

$2(\sqrt{5}+\sqrt{3}-1)$

$\Leftrightarrow\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{1+2\sqrt{3}}}\times\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{1+2\sqrt{3}}}=\sqrt{3}-1$

$\Leftrightarrow\sqrt{5-(1+2\sqrt{3})}=\sqrt{3}-1$

$\Leftrightarrow 4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2$

$\Leftrightarrow 4-2\sqrt{3}=3-2\sqrt{3}+1$

$\Leftrightarrow 4-2\sqrt{3}=4-2\sqrt{3}$

上述推理的最后一个等式明显是成立的. 而推理的每一步都是可逆的. 从而求证式成立.

**例 2**　求证：$(ab)^{\lg a+\lg b}=a^{\lg a}\cdot b^{\lg b}\cdot a^{2\lg b}$.

**证明**　$(ab)^{\lg a+\lg b}=a^{\lg a}\cdot b^{\lg b}\cdot a^{2\lg b}$

$\Leftrightarrow\lg(ab)^{\lg a+\lg b}=\lg(a^{\lg a}\cdot b^{\lg b}\cdot a^{2\lg b})$

$\Leftrightarrow(\lg a+\lg b)\lg ab=\lg a^{\lg a}+\lg b^{\lg b}+\lg a^{2\lg b}$

$\Leftrightarrow(\lg a+\lg b)^2=(\lg a)^2+(\lg b)^2+2(\lg b)(\lg a)$

根据$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$，上述推理的最后一个等式明显是成立的. 而推理的每一步都是可逆的. 从而求证式成立.

**例 3**　已知 $a+b+c=0$，求证

$$2a^2+bc=(b-a)(c-a)$$

**证明**　$2a^2+bc=(b-a)(c-a)$

$\Leftrightarrow 2a^2+bc=bc+a^2-ab-ac$

$\Leftrightarrow a^2+ab+ac=0$

$\Leftrightarrow a(a+b+c)=0$

根据条件 $a+b+c=0$，故上述推理的最后等式的成立是显然的，而上述推理的每一步可逆，故求证式成立.

**例 4** 已知$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$,求证

$$a^2+b^2+c^2=(a+b-c)^2$$

**证明** $a^2+b^2+c^2=(a+b-c)^2$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$

$\Leftrightarrow ac+bc=ab$

$\Leftrightarrow c(a+b)=ab$

$\Leftrightarrow \frac{a+b}{ab}=\frac{1}{c}$ (因为 $abc\neq 0$)

$\Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$

上述推理的最后等式恰是条件式,而推理的每一步可逆,从而可知求证式成立.

**例 5** 已知 $b^2=ac$,求证

$$\frac{\log_a m}{\log_c m}=\frac{\log_a m-\log_b m}{\log_b m-\log_c m}$$

**分析** 求证式中有对数,而条件式无,应将求证式中的对数式转化为指数式. 而求证式的各对数的真数都是 $m$,故可用对数换底公式,将每个对数式都换为以 $m$ 为底的对数,这样即可利用对数运算法则进行化简,最后达到化对数式为指数式,从而达到与条件式一致的目的.

**证明** $\frac{\log_a m}{\log_c m}=\frac{\log_a m-\log_b m}{\log_b m-\log_c m}$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_m c}{\log_m a}=\frac{\frac{1}{\log_m a}-\frac{1}{\log_m b}}{\frac{1}{\log_m b}-\frac{1}{\log_m c}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_m c}{\log_m a}=\frac{\log_m c(\log_m b-\log_m a)}{\log_m a(\log_m c-\log_m b)}$$

$$\Leftrightarrow 1=\frac{\log_m b-\log_m a}{\log_m c-\log_m b}\quad (因为\ a\neq 1,c\neq 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_m c-\log_m b=\log_m b-\log_m a$$

$$\Leftrightarrow \log_m \frac{c}{b}=\log_m \frac{b}{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{b}=\frac{b}{a}$$

$$\Leftrightarrow b^2=ac$$

推理的最后等式正是条件式，而推理的每一步可逆，故求证式成立.

以上五个例子足以说明分析法是如何使用的了. 例 1 是无理等式；例 2 是指数对数等式，若用“按图索骥”，则证明的难度较大. 相反，用倒果为因的分析法，逐次平方或取对数，最后化简得到一个明显的等式，这样显得比较轻松自然. 例 3、例 4、例 5，由于条件式比求证式来得简单，故使用分析法也显得优越. 但“按图索骥”仍是分析法的灵魂. 因为化简总应该有一个目标，这个目标就是条件式. 故同样应该分析求证式与条件式的差异，然后寻找恰当的措施，使求证式和条件式的差异逐渐缩小，最后达到将求证式化为条件式，从而完成证明.

例 1、例 2 都是普通等式，使用分析法，只需化简即可. 若是分式，去分母化为整式；若是无理式，则用乘方去根号化为有理式；若是指数式，取对数. 乘与除，乘方与开立方，指数与对数都是化简等式的有力杠杆. 例 3、例 4、例 5 是条件式的证明，可“按图索骥”，使求证式化为条件式. 由于例 3、例 4、例 5 的条件式都只有一个，而且条件式比求证式简单，故化求证式为条件式，方向比较明确，计算量较小，技巧性一般较低，从而证

明比较自然，充分显示分析法的优越性.然而有些条件等式中，条件式有好几个，而且条件式比求证式来得复杂.一般说来，对这类问题，原则上不采用倒果为因的分析法，这并不是做不出来，而是因为这样做技巧难度较大及计算量较大之故.

**例 6** 已知 $x^2-yz=a$，$y^2-zx=b$，$z^2-xy=c$，$ax+by+cz=d$，求证

$$d^2=a^3+b^3+c^3-3abc$$

**证明** $d^2=a^3+b^3+c^3-3abc$

$\Leftrightarrow(ax+by+cz)^2=$
$(x^2-yz)^3+(y^2-zx)^3+(z^2-xy)^3-$
$3(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)$

$\Leftrightarrow(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2=$
$(x^2-yz)^3+(y^2-zx)^3+(z^2-xy)^3-$
$3(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)$

$\Leftrightarrow x^6+y^6+z^6+9x^2y^2z^2+2x^3y^3+2x^3z^3+$
$2y^3z^3-6x^4yz-6xy^4z-6xyz^4=$
$x^6-3x^4yz+3x^2y^2z^2-y^3z^3+y^6-3xy^4z+$
$3x^2y^2z^2-z^3x^3+z^6-3xyz^4+3x^2y^2z^2-x^3y^3+$
$3y^3z^3+3z^3x^3-3xyz^4+3x^3y^3-3xy^4z-3x^4yz$

$\Leftrightarrow x^6+y^6+z^6+9x^2y^2z^2+2x^3y^3+2z^3x^3+$
$2y^3z^3-6x^4yz-6xy^4z-6xyz^4=$
$x^6+y^6+z^6+9x^2y^2z^2+2x^3y^3+2y^3z^3+$
$2z^3x^3-6x^4yz-6xy^4z-6xyz^4$

上述推理最后等式是明显的，而且推理的每一步都可逆，从而求证式成立.

显然例 6 用分析法的计算量比第 4 章殊途同归中所提供的证法的计算量大，但就证明思路而言，比较自

然，技巧性通常并不很高. 在解决一般的等式证明中，普遍是有效的. 读者可以把第 2 章按图索骥中的例 1 至例 19 都用倒果为因的分析法试做一下，就会发现分析法是等式证明中的一个很好的方法.

## 练习题

1. 求证：$\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)$.

2. 若 $a,b,c$ 都是不等于 1 的互不相等的正数，求证：$a^{\log_n \frac{c}{b}}\cdot b^{\log_n \frac{a}{c}}\cdot c^{\log_n \frac{b}{a}}=1$.

3. 已知 $2b=a+c$，求证

$$3(a^2+b^2+c^2)=6(a-b)^2+(a+b+c)^2$$

4. 用分析法证明第 2 章按图索骥中的例 1 至例 19.

# 非此即彼

# 第6章

在前几章中，我们使用了直接推理的方法论证了一些代数等式. 如果我们从否定结论出发去论证问题，这样，我们又有了一种间接证明代数等式的手段——反证法. 反证法的论证问题的方法是从否定命题的结论出发，而在肯定命题假设的条件下依据已确定的公理、定理和定义，运用逻辑推理的方法导致逻辑矛盾. 然后根据形式逻辑中的矛盾律，推知否定结论的错误性，再根据逻辑中的排中律，而导致结论本身的正确性. 这真是“此非”而“彼是”. 因而我们把用反证法证明代数等式的这一章定名为“非此即彼”.

**例 1**　求证

$$\frac{1}{1+a}=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+\frac{a^6}{1+a}$$

**分析**　此题若从肯定结论出发，即若

$$\frac{1}{1+a}=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+\frac{a^6}{1+a}$$

成立，两边都乘 $1+a$，则有

$$1=(1+a)(1-a+a^2-a^3+a^4-a^5)+a^6 \quad (1)$$

将式(1)右边展开合并同类项后，得到 $1=1$. 显然还是成立的. 另外，可以看到由于原式成立，所以 $1+a\neq 0$，因而上述推理的每一步都是可逆的，在此基础上，我们肯定了原式成立的结论.

如果我们从否定结论出发，即否定原求证式的成立，其否定的方式有两种：

(1)在结论式中加一个“不”字，即

$$\frac{1}{1+a}\neq 1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+\frac{a^6}{1+a}$$

(2)弄清 $\frac{1}{1+a}=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+\frac{a^6}{1+a}$ 的全部相反情况，然后逐一否定.

**证明**　若 $\frac{1}{1+a}\neq 1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+\frac{a^6}{1+a}$

则

$$1\neq(1+a)(1-a+a^2-a^3+a^4-a^5)+a^6$$

即

$$1\neq 1$$

这是矛盾的，所以原式成立.

**例 2**　设 $x,y,z$ 是实数，且满足

$$x-3y+2z=0$$
$$y-3z+2x=0$$
$$z-3x+2y=0$$

求证：$x=y=z$.

**证明**　若 $x\neq y$，则存在实数 $d$，使 $x=y+d$，其中 $d\neq 0$. 代入条件式可得

$$-2y+2z+d=0 \tag{2}$$
$$3y-3z+2d=0 \tag{3}$$
$$-y+z-3d=0 \tag{4}$$

将式(2)乘 3,式(3)乘 2 相加得 $7d=0$,因为 $d\neq 0$. 所以 $7=0$,矛盾. 故 $d=0$,所以 $x=y$. 同理可证 $y=z$. 故 $x=y=z$.

**例 3** 设 $a,b,c,d$ 是四个正整数,且满足 $a<b<c<d$ 以及 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$.

求证:(1)$a=2,b=3$ 或 4;

(2)$a,b,c,d$ 共有六组解.

**分析** 我们首先否定(1)的结论,即 $a\neq 2,b\neq 3$ 和 4. 如果我们从这样的结论出发,是很难完成证明的. 事实上,由于 $a\neq 2$,则有

$$a=1,3,4,5,\cdots$$

如果对这些数一一予以论证,则永远也完不成证明. 因此将 $a=2$ 否定为 $a=1$ 或 $a\geqslant 3$. 若从这两个结论出发,能导出矛盾的话,也就证明了所求证的结论 $a=2$. 这种否定结论的方式,就是前面所说,要找出结论的所有相反的情形,然后根据各种相反情形,分别导出矛盾,从而完成证明.

**证明** (1)若 $a=1$,因为 $a,b,c,d$ 是正整数,所以

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}>1$$

这与 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$ 相矛盾. 故 $a\neq 1$;

若 $a\geqslant 3$,则由于

$$a<b<c<d$$

于是

$$b\geqslant 4,c\geqslant 5,d\geqslant 6$$

故

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\leqslant\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{57}{60}<1$$

这又与$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$相矛盾，故 $a<3$. 因此，$a=2$.

由 $a=2$ 以及$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$可得

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{2}$$

若 $b\geqslant 5$，$c\geqslant 6$，$d\geqslant 8$，则

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\leqslant\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{59}{120}<\frac{1}{2}$$

若 $b=5$，$c=6$，$d=7$，则

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{107}{210}>\frac{1}{2}$$

这两种情况都与$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{2}$相矛盾，故 $b<5$. 从而由 $b>a=2$ 可知 $b=3$ 或 4.

(2)若 $a=2$，$b=3$，则由条件式

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$$

可得

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{6}$$

若 $c\geqslant 12$，则 $d>c\geqslant 12$，故 $d\geqslant 13$.

此时$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\leqslant\frac{1}{12}+\frac{1}{13}<\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$，这与$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{6}$相矛盾，故 $c<12$.

因为$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{6}$，所以

$$d=\frac{6c}{c-6}$$

因为 $d$ 是正整数，所以

$$c>6$$

故

$$7\leqslant c\leqslant 11$$

由此 $c=7,8,9,10,11$.

代入 $d=\dfrac{6c}{c-6}$中可得相应的 $d$ 值为

$$d=42,24,18,15,\frac{66}{5}$$

$d=\dfrac{66}{5}$与 $d$ 是正整数的假设矛盾. 这时我们可得到四组解

$$\begin{cases}a=2\\b=3\\c=7\\d=42\end{cases};\quad\begin{cases}a=2\\b=3\\c=8\\d=24\end{cases};\quad\begin{cases}a=2\\b=3\\c=9\\d=18\end{cases};\quad\begin{cases}a=2\\b=3\\c=10\\d=15\end{cases}$$

当 $a=2,b=4$ 时,用同样的方法可以得到两组解

$$\begin{cases}a=2\\b=4\\c=5\\d=20\end{cases};\quad\begin{cases}a=2\\b=4\\c=6\\d=12\end{cases}$$

从上面的例子中,我们看到反证法不但具有演绎推理的特点,而且兼有分析法的特点. 它们都是从结论推证下去的. 所不同的是分析法是从肯定结论出发的,而反证法是从否定结论出发的;另外,得到的结论也不一样,分析法是以得到的可逆推回去的显然成立的结论而告终,而反证法得到的结论却是与已知事实相矛盾,从而导出原结论的成立. 因此,在某种意义上说,反证法是否定式的分析法.

# 过河搭桥

# 第7章

过河常用的方法之一是搭桥.如果把一个数学等式的左边和右边视为河的两岸,则要证明一个等式的成立,犹如过河一样.在代数等式的证明中,“桥”是多种多样的,例如条件式是连比形式时,经常以引入一个比例常数 $k$ 来做“桥”;有的等式的证明,我们又借助于方程、方程组;甚至利用不等式、三角函数的一些性质来帮助我们证明代数等式.下面我们逐一加以介绍.

## §1 借助于比例常数

**例 1** 若$\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}$,求证

$$x+y+z=0$$

**证明** 设

$$\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}=k$$

则

$$x=k(a-b),y=k(b-c),z=k(c-a)$$

所以

$$x+y+z=k(a-b)+k(b-c)+k(c-a)=$$
$$k(a-b+b-c+c-a)=0$$

**例 2** 若$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$,求证

$$\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{26}{29}$$

**证明** 设

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k$$

则

$$x=2k,y=3k,z=4k$$

由此

$$\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{2k\cdot 3k+3k\cdot 4k+4k\cdot 2k}{(2k)^2+(3k)^2+(4k)^2}=$$
$$\frac{k^2(6+12+8)}{k^2(4+9+16)}=\frac{26}{29}$$

**例 3** 若 $a:b:c=a':b':c'$,求证

$$\frac{ma+nb+pc}{ma'+nb'+pc'}=\frac{a}{a'}$$

**证明** 设

$$a=ka',b=kb',c=kc'$$

则

$$\frac{ma+nb+pc}{ma'+nb'+pc'}=\frac{mka'+nkb'+pkc'}{ma'+nb'+pc'}=$$
$$\frac{k(ma'+nb'+pc')}{ma'+nb'+pc'}=$$
$$k=\frac{a}{a'}$$

**例 4**　若$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$,求证

$$\frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}=\frac{(x+y)^2+(a+b)^2}{x+y+a+b}$$

**分析**　求证式左边是商和,右边是和商.理应通分.但左边通分后分母是二次多项式,这与右边分母是一次多项式的目标并没有接近,故应在通分前先将左边的分式约简才好.条件式是一个比例式.对$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$,引入比例常数 $k$ 有三种方式:(1)视$\frac{a}{b}$为 $k$;(2)设$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}=k$,则 $x=ky,a=kb$;(3)改条件式为$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=k$,则 $x=ka,y=kb$.第一种代入求证式将出现繁分式,故不可取;其余两种设法没有本质的区别,我们取第三种设法,并且代入求证式的两边进行化简.

**证明**　设 $x=ka,y=kb$.则

$$\begin{aligned}\frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}&=\frac{k^2a^2+a^2}{ka+a}+\frac{k^2b^2+b^2}{kb+b}=\\&\frac{a(k^2+1)}{k+1}+\frac{b(k^2+1)}{k+1}=\\&\frac{(a+b)(k^2+1)}{k+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{(x+y)^2+(a+b)^2}{x+y+a+b}&=\frac{(ka+kb)^2+(a+b)^2}{ka+kb+a+b}=\\&\frac{(a+b)^2(k^2+1)}{(a+b)(k+1)}=\\&\frac{(a+b)(k^2+1)}{k+1}\end{aligned}$$

由此求证式成立.

**例 5**　设$\frac{bz-cy}{b-c}=\frac{cx-az}{c-a}$,$a,b,c$ 各不相等,且

$abc\neq 0$,则此各分式等于$\dfrac{ay-bx}{a-b}$,且

$$a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0$$

**证明** 设

$$\frac{bz-cy}{b-c}=\frac{cx-az}{c-a}=k$$

则

$$bz-cy=k(b-c) \tag{1}$$

$$cx-az=k(c-a) \tag{2}$$

为了得到$\dfrac{ay-bx}{a-b}$,由于其没有字母 $z$,故在式(1),式(2)中消去 $z$.由 $a(1)+b(2)$得

$$bcx-acy=ak(b-c)+bk(c-a) \tag{3}$$

即

$$c(bx-ay)=kc(b-a) \tag{4}$$

因为 $c\neq 0$,$a-b\neq 0$,故

$$\frac{ay-bx}{a-b}=k \tag{5}$$

即

$$\frac{bz-cy}{b-c}=\frac{cx-az}{c-a}=\frac{ay-bx}{a-b} \tag{6}$$

因为

$$bz-cy=k(b-c) \tag{7}$$

$$cx-az=k(c-a) \tag{8}$$

$$ay-bx=k(a-b) \tag{9}$$

等式(7),(8),(9)相加,即得

$$a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0 \tag{10}$$

**例 6** 若 $2^{6x}=3^{3y}=6^{2z}$($xyz\neq 0$),求证

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{3}{z}$$

**分析**　条件是指数式，求证是对数式，故由条件式变为求证式应取对数.

**证明**　设

$$2^{6x}=3^{3y}=6^{2z}=k$$

则

$$6x\lg 2=3y\lg 3=2z\lg 6=\lg k$$

故

$$\frac{1}{x}=\frac{6\lg 2}{\lg k},\frac{2}{y}=\frac{6\lg 3}{\lg k},\frac{3}{z}=\frac{6\lg 6}{\lg k}$$

由此

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{6\lg 2}{\lg k}+\frac{6\lg 3}{\lg k}=\frac{6(\lg 2+\lg 3)}{\lg k}=\frac{6\lg 6}{\lg k}=\frac{3}{z}$$

**例 7**　若$\frac{x(y+z-x)}{\log_a x}=\frac{y(z+x-y)}{\log_a y}=\frac{z(x+y-z)}{\log_a z}$.

求证：$x^y y^x=z^x x^z=y^z z^y$.

**分析**　条件式是对数式，求证式是指数式，故应将对数式化为指数式.另外条件式和求证式都是连等式，因此要架“桥”，根据对数的性质，设比例常数为$\frac{1}{k}$.

**证明**　设

$$\frac{x(y+z-x)}{\log_a x}=\frac{y(z+x-y)}{\log_a y}=\frac{z(x+y-z)}{\log_a z}=\frac{1}{k}$$

则

$$\log_a x=kx(y+z-x) \tag{11}$$

$$\log_a y=ky(x+z-y) \tag{12}$$

$$\log_a z=kz(x+y-z) \tag{13}$$

为了得到 $y^x,x^y,x^z,z^x,y^z,z^y$ 等因式，根据对数运算法则，可以由：

$y(11)+x(12)$得

$$y\log_a x + x\log_a y = 2kxyz$$

$z(12)+y(13)$得

$$z\log_a y + y\log_a z = 2kxyz$$

$x(13)+z(11)$得

$$z\log_a x + x\log_a z = 2kxyz$$

故

$$y\log_a x + x\log_a y = z\log_a y + y\log_a z = z\log_a x + x\log_a z$$

即

$$\log_a(x^y y^x) = \log_a(y^z z^y) = \log_a(x^z z^x)$$

因此

$$x^y y^x = y^z z^y = x^z z^x$$

**例 8** 若 $bc=ad$.求证

$$(a+b)(a+c)(d+b)(d+c) = ad(a+b+c+d)^2$$

**分析** 此题条件式是用积的形式给出的.若要设出比例常数 $k$,则应将条件式改写成分式的形式,即化为$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$的形式.这样做当然要求 $bd\neq 0$.事实上,若 $bd=0$,则易证求证式成立,现不妨设 $bd\neq 0$,则可设$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$,即 $a=bk$,$c=dk$,代入求证式左边以及右边即可.

**证明** 设 $b=0$,则 $ad=bc=0$,故 $a$,$d$ 中必有一个为 0,不妨设 $a=0$,则

$$(a+b)(a+c)(d+b)(d+c) = 0\cdot c\cdot d\cdot(d+c) = 0$$

$$ad(a+b+c+d)^2 = 0$$

故求证式成立.

同样可知,$d=0$ 时,求证式也成立.

设 $bd\neq 0$,则设

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$$

故

$$a=bk, c=dk$$

因此在求证式中

$$\begin{aligned}\text{左边}=&(a+b)(a+c)(d+b)(d+c)=\\&(bk+b)(bk+dk)(d+b)(d+dk)=\\&bdk(k+1)^2(d+b)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{右边}=ad(a+b+c+d)^2=&bdk(bk+b+dk+d)^2=\\&bdk(k+1)^2(d+b)^2\end{aligned}$$

故求证式成立.

## §2　借助于方程和方程组

**例 1**　试证

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$$

**证明**　设

$$x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$$

则

$$\begin{aligned}x^3=&20+14\sqrt{2}+20-14\sqrt{2}+\\&3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})}\cdot\\&(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}})=\\&40+3\cdot\sqrt[3]{400-196\cdot 2}\cdot x=\\&40+6x\end{aligned}$$

故 $x$ 满足方程

$$x^3-6x-40=0$$

即

$$(x-4)(x^2+4x+10)=0$$

因为二次三项式 $x^2+4x+10$ 的判别式 $\Delta=16-40<0$,故对一切实数 $x$,$x^2+4x+10>0$,故 $x-4=0$,所以 $x=4$. 即

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$$

**例 2** 已知 $x+\dfrac{1}{x}=2\cos\theta$,求证:$x^n+\dfrac{1}{x^n}=2\cos n\theta$.

**证明** 由条件式得

$$x^2-2x\cos\theta+1=0$$

解之得

$$x=\cos\theta\pm \mathrm{i}\sin\theta$$

这里 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$. 借助于梯美弗(de Moivre)公式 $(\cos\theta\pm \mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta\pm \mathrm{i}\sin n\theta$ 因此有

$$\begin{aligned}x^n+\frac{1}{x^n}&=\frac{x^{2n}+1}{x}=\\&\frac{(\cos\theta\pm \mathrm{i}\sin\theta)^{2n}+1}{(\cos n\theta\pm \mathrm{i}\sin\theta)^n}=\\&\frac{(\cos n\theta\pm \mathrm{i}\sin n\theta)^2+1}{\cos n\theta\pm \mathrm{i}\sin n\theta}=\\&\frac{2\cos^2 n\theta\pm 2\mathrm{i}\sin n\theta\cos n\theta}{\cos n\theta\pm \mathrm{i}\sin n\theta}=\\&2\cos n\theta\cdot\frac{\cos n\theta\pm \mathrm{i}\sin n\theta}{\cos n\theta\pm \mathrm{i}\sin n\theta}=\\&2\cos n\theta\end{aligned}$$

**例 3** 设 $x,y,z$ 为正实数,且满足

$$x^2+xy+y^2=49 \qquad (1)$$

$$y^2+yz+z^2=36 \qquad (2)$$

$$z^2+zx+x^2=25 \qquad (3)$$

求证:$x+y+z=\sqrt{55+26\sqrt{2}}$.

**分析** 根据求证式的特点,要求我们从条件式按

图索骥构造出 $x+y+z$ 来.根据公式

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$$

将式(1),(2),(3)相加得

$$(x+y+z)^2+(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=110$$

因此

$$(x+y+z)^2=110-\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$$

此式暗示,我们还需要从条件式中再构造出 $x-y,y-z,z-x$ 的表达式来,于是从:

(1)-(2)得

$$(x-z)(x+y+z)=13 \tag{4}$$

(1)-(3)得

$$(y-z)(x+y+z)=24 \tag{5}$$

(2)-(3)得

$$(y-x)(x+y+z)=11 \tag{6}$$

我们看到 $x-y,y-z,z-x$ 恰好可用 $x+y+z$ 表示出来,这样可求得视 $x+y+z$ 为未知数的一个方程,从而可借助解方程而获得求证式.

**证明**　由条件式可得

$$y-x=\frac{11}{x+y+z}$$

$$y-z=\frac{24}{x+y+z}$$

$$x-z=\frac{13}{x+y+z}$$

以及

$$(x+y+z)^2+\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]=110$$

故

$$(x+y+z)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{11^2+24^2+13^2}{(x+y+z)^2}=110$$

即

$$(x+y+z)^4-110(x+y+z)^2+433=0$$

解$(x+y+z)^2$为未知数的二次方程得

$$(x+y+z)^2=55\pm 36\sqrt{2}$$

因为 $x>0, y>0, z>0$，故

$$(x+y+z)^2>x^2+xy+y^2=49$$

而 $55-36\sqrt{2}<49$，所以

$$(x+y+z)^2=55+36\sqrt{2}$$

故

$$x+y+z=\sqrt{55+36\sqrt{2}}$$

**例 4** 若$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}=1$，求证：或 $x=1$，或 $y=1$，或 $z=1$.

**分析** 由条件式可得

$$x+y+z=1$$

$$xyz=xy+yz+zx(=k)$$

由这两个等式的对称性，使我们联想到一元多项式方程的根与系数的关系. 故我们将 $x,y,z$ 视为下列三次方程

$$t^3-t^2+kt-k=0$$

的三个根. 由于这个三次方程的系数之和为 0，故其必有一个根为 1. 从而证明了命题.

**证明** （略）.

**例 5** 已知 $x+y+z=m$，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$，$xyz=1$，求证：$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=-2m$.

**分析**　条件式可以变为 $x+y+z=m$，$xy+yz+zx=0$，$xyz=1$. 故由方程的根与系数的关系，我们可以视 $x,y,z$ 为三次方程

$$t^3-mt^2-1=0$$

的三个根. 在求证式 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=-2m$ 中，$\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2},\frac{1}{z^2}$ 恰是 $x,y,z$ 的倒数平方. 如果我们能找到以 $\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2},\frac{1}{z^2}$ 为根的三次方程，则 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$ 恰等于这个三次方程的第二项系数的相反数. 以上就是我们证明本题的指导思想.

我们知道，若方程

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

的根为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，则它们的倒根 $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\cdots,\frac{1}{x_n}$ 的方程是

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

又因为

$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

故

$$(-1)^nf(-x)=a_0(x+x_1)(x+x_2)\cdots(x+x_n)$$

故

$$(-1)^nf(x)f(-x)=a_0^2(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)\cdots(x^2-x_n^2)$$

在上述等式的右边乘积中只有 $x$ 的偶数次项，当把 $x^2$ 改写成 $y$ 时，就得到 $y$ 的一个 $n$ 次多项式 $g(y)$，它的首项系数是 $a_0^2$，而且以 $x_1^2,x_2^2,\cdots,x_n^2$ 为根.

根据上述理论，我们给出本例的下述证明.

**证明**　根据条件式可知，$x,y,z$ 是三次方程

$$t^3-mt^2-1=0$$

的三个根. 由此

$$f(t)\equiv -t^3-mt+1=0$$

的三个根是$\frac{1}{x}$,$\frac{1}{y}$,$\frac{1}{z}$. 作乘积

$$\begin{aligned}(-1)^3f(t)f(-t)=&-(-t^3-mt+1)(t^3+mt+1)=\\&(t^3+mt-1)(t^3+mt+1)=\\&(t^3+mt)^2-1=\\&t^6+2mt^4+m^2t^2-1\end{aligned}$$

则方程

$$u^3+2mu^2+m^2u-1=0$$

的三个根分别是$\frac{1}{x}$,$\frac{1}{y}$,$\frac{1}{z}$的平方$\frac{1}{x^2}$,$\frac{1}{y^2}$,$\frac{1}{z^2}$,根据根与系数的关系,即得

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=-2m$$

**例 6** 若$\frac{y+z}{x}=\frac{z+x}{y}=\frac{x+y}{z}=m$,求证

$$m=2\text{ 或 }m=-1$$

**分析** 将条件式变为 $y+z=mx$,$z+x=my$,$x+y=mz$,即

$$\begin{cases}-mx+y+z=0\\x-my+z=0\\x+y-mz=0\end{cases}$$

则 $x,y,z$ 可以视为上述三元齐次线性方程组的一组非零解(根据条件式,自然 $x,y,z$ 全不为 0),而上述方程组有非零解的充要条件是行列式

$$D=\begin{vmatrix}-m & 1 & 1\\1 & -m & 1\\1 & 1 & -m\end{vmatrix}=0$$

以下只需计算一下行列式 $D$，解一个关于 $m$ 的方程即可.

**证明**　因为

$$D=\begin{vmatrix}-m & 1 & 1\\ 1 & -m & 1\\ 1 & 1 & -m\end{vmatrix}\overset{\substack{-(3)+(2)\\ m(3)+(1)}}{=\!=\!=\!=}$$

$$\begin{vmatrix}0 & 1+m & 1-m^2\\ 0 & -1-m & 1+m\\ 1 & 1 & -m\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+m & 1-m^2\\ -1-m & 1+m\end{vmatrix}=$$

$$(1+m)^2\begin{vmatrix}1 & 1-m\\ -1 & 1\end{vmatrix}=(1+m)^2(2-m)$$

故由 $D=0$ 得

$$(1+m)^2(2-m)=0$$

所以

$$m=2 \text{ 或 } m=-1$$

**注 1**　像遇到上述行列式的方程，在行列式的计算中最好采用初等变换，这样有利于将所得的方程因式分解，有利于解方程.

**注 2**　在行列式的计算中，我们在等号上写了 $-(3)+(2)$ 等，这是行列式初等变换的记录，$-(3)+(2)$ 乃表示第三行乘 $-1$ 加到第二行，余类推，若进行列变换，用符号 $\overset{\frown}{\underset{\smile}{\ }}$ 来表示，如 $\overset{\frown}{\underset{\smile}{2}}$ 乃表示行列式中的第二列.

**例 7**　已知 $a+2b+3c+4d=0$，$a-2b+4c+5d=0$，求证：$a+10b+c+2d=0$.

**证法 1**　将条件式中的 $a$，$b$ 视为未知数，解二元一次方程组. 用 $c$，$d$ 表示 $a$，$b$，然后代入求证式，合并 $c$，$d$ 的同类项，理应为 0.

解方程组

$$\begin{cases}a+2b=-3c-4d\\a-2b=-4c-5d\end{cases}$$

得

$$a=\frac{1}{2}(-7c-9d),b=\frac{1}{4}(c+d)$$

由此

$$\begin{aligned}a+10b+c+2d&=\frac{1}{2}(-7c-9d)+\frac{5}{2}(c+d)+c+2d=\\&\frac{1}{2}(-2c-4d)+c+2d=\\&-c-2d+c+2d=0\end{aligned}$$

求证式得证.

**证法 2** 若令

$$\begin{aligned}f_1&=a+2b+3c+4d\\f_2&=a-2b+4c+5d\\f_3&=a+10b+c+2d\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}3f_1-2f_2&=3(a+2b+3c+4d)-2(a-2b+4c+5d)=\\&a+10b+c+2d=f_3\end{aligned}$$

故当 $f_1=0,f_2=0$ 时,必有 $f_3=0$. 求证式得证.

读者自然会问,你怎么知道 $f_1$ 的 3 倍减去 $f_2$ 的 2 倍就是 $f_3$ 呢? 有没有一般的方法可以找到这些系数呢? 在这里我们简单地介绍一下用记录矩阵来发现这些系数(在高等代数中称这些数为相关系数).

由于 $f_1,f_2,f_3$ 都是 $a,b,c,d$ 的一次齐式,故我们在 $a,b,c,d$ 的次序下,省略字母,将 $f_i$ 用向量形式表示,则

$$f_1=(1,2,3,4)$$

$$f_2=(1,-2,4,5)$$
$$f_3=(1,10,1,2)$$

将 $f_1,f_2,f_3$ 的数字排在一起，可以得到一张表格，在数学上叫作矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 4 & 5\\ 1 & 10 & 1 & 2\end{pmatrix}_f$$

在这个矩阵右大括号外的下标处加上 $f$，目的是提示我们它的三个行向量是 $f_1,f_2,f_3$.

对应于解线性方程组的加减消元法，我们对于矩阵创造了相应的行的初等变换，它们是：(1)任意两行可以对换；(2)以一个不为零的数乘上一行中的每一个元素加到另一行的对应的元素. 例如 $f_2-f_1=(-1)f_1+f_2$ 表示在矩阵 $f$ 中，第一行 $f_1$ 的所有元素乘上 $-1$ 加到矩阵 $f$ 中的第二行的相应位置的数上去. 实际上也可以说在第二行中所有的元素减去第一行中的对应的数，所以也可以记为 $f_2-f_1$.

如果我们对上述矩阵进行行的初等变换，我们必可以使某一行变成全是 0 的向量，否则我们的求证式就不可能成立. 在行变换时，我们要求做记录，为的是可以最后翻译出来，发现证明. 现示范如下

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 4 & 5\\ 1 & 10 & 1 & 2\end{pmatrix}_f \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-f_1} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -4 & 1 & 1\\ 0 & 8 & -2 & -2\end{pmatrix}_g \xrightarrow{2g_2+g_3}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_h$$

当矩阵的某一行变为 0 时，变换即可停止. 现在让

我们一起来发现证明.为了说清问题,我们第一个矩阵用 $f$ 来表示.它的第一行用 $f_1$ 表示,第二行用 $f_2$ 表示.类似地,把第二个矩阵用 $g$ 来表示,它的第一行用 $g_1$ 表示,第二行用 $g_2$ 表示,第三个矩阵的第一行用 $h_1$ 表示等.这时根据记录可以得到

$$h_3=0 \tag{7}$$

$$h_3=2g_2+g_3 \tag{8}$$

$$g_2=f_2-f_1,g_3=f_3-f_1 \tag{9}$$

将式(9)诸关系,逐次代入式(7),(8),最后可得

$$2(f_2-f_1)+(f_3-f_1)=0$$

故

$$f_3=3f_1-2f_2$$

为了使读者能掌握这个方法,再举一例.

**例 8** 已知 $2a-b+2c+d=0,4a-2b-c+3d=0,2a-b-4c+4d=0$,求证:$10a-5b-6c+10d=0$.

**分析** 令 $f_1=(2,-1,2,1),f_2=(4,-2,-1,3),f_3=(2,-1,-4,4),f_4=(10,-5,-6,10)$.

作相应的矩阵,并进行行的初等变换

$$\begin{pmatrix}2&-1&2&1\\4&-2&-1&3\\2&-1&-4&4\\10&-5&-6&10\end{pmatrix}_f\xrightarrow[-5f_1+f_4]{\substack{-2f_1+f_2\\-f_1+f_3}}$$

$$\begin{pmatrix}2&-1&2&1\\0&0&-5&1\\0&0&-6&3\\0&0&-16&5\end{pmatrix}_g\xrightarrow{\substack{-3g_2+g_3\\-5g_2+g_4}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}_h \xrightarrow{-h_3+h_4}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_u$$

根据上述变换的记录,我们可以得到如下一些等式

$$u_4=0$$

$$u_4=-h_3+h_4$$

$$h_3=-3g_2+g_3, h_4=-5g_2+g_4$$

$$g_2=-2f_1+f_2, g_3=-f_1+f_3, g_4=-5f_1+f_4$$

故

$$\begin{aligned}0=&-(-3g_2+g_3)+(-5g_2+g_4)=-2g_2-g_3+g_4=\\&-2(-2f_1+f_2)-(-f_1+f_3)+(-5f_1+f_4)=\\&-2f_2-f_3+f_4\end{aligned}$$

所以

$$f_4=2f_2+f_3$$

**证明**　将条件式中的第二个 2 倍加上第三个即得求证式.

## §3　借助于三角恒等式

三角函数的性质及其公式是极其丰富的,又由于三角函数值本身就是一个数,故有许多三角等式,当我们经过适当地代换后,就可以转化成一个代数等式,例

如下列命题：

求证：$\sin^4\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$.

如果我们令 $x=\sin\alpha$，$y=\cos\alpha$，则上述命题就变为已知 $x^2+y^2=1$，求证：$x^4+y^2+x^2y^2=1$.

而这个代数等式的证明，只要将左边的和化为积，并利用条件 $x^2+y^2=1$，两步就可以证出求证式. 其实，这里提出的三角恒等式的命题，左边和右边主要有运算上的差异，故本质上就是一个简单的代数等式的证明题. 又如

若 $\alpha>0$，$\beta>0$，$\gamma>0$，且 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，求证

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1$$

我们看到条件式与求证式有函数的差异，故可对条件式 $\alpha+\beta=\pi-\gamma$ 的两边取余弦得

$$\cos(\alpha+\beta)=-\cos\gamma$$

此条件与求证式有角的差异，用和角公式展开后，条件式变为

$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\cos\gamma \tag{1}$$

而此条件与求证式还有函数的差异，将式(1)中的正弦都转化为余弦得

$$\cos\alpha\cos\beta-\sqrt{1-\cos^2\alpha}\cdot\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\cos\gamma$$

或

$$\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma=\sqrt{1-\cos^2\alpha}\cdot\sqrt{1-\cos^2\beta}$$

若令 $x=\cos\alpha$，$y=\cos\beta$，$z=\cos\gamma$，则原三角命题就转化为一个代数命题：

已知 $xy+z=\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}$，求证

$$x^2+y^2+z^2+2xyz=1$$

而这个命题的证明不是很困难的.

特别地，万能代换公式

$$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2},\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2},\tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2}$$

其中 $t=\tan\frac{\alpha}{2}$,更是连接三角和代数的桥梁.

以上的例子说明有许多三角恒等式经过适当地变换,就可以转化为一个代数条件等式.从而三角恒等式的证明变为代数等式的证明.反过来,一个代数等式的证明,在某种情况下自然也可以用适当的变换化为三角等式,然后利用三角函数的性质及有关公式,对这个转化后的式子予以证明,这就是这一节的主要任务.

**例 1**　设 $a,b,c,d$ 是实数,且满足

$$a^2+b^2=1,c^2+d^2=1,ac-bd=0$$

求证:$|ad+bc|=1$.

**分析**　对任意的 $\alpha$,$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.本题的条件 $a^2+b^2=1$,$c^2+d^2=1$,使我们联想起这个三角等式.又因为 $a,b,c,d$ 都是实数,故我们总可以找到适当的 $\alpha,\beta$,使 $\cos\alpha=a,\sin\alpha=b;\cos\beta=c,\sin\beta=d$.这样的条件式就变为

$$ac-bd=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)$$

而

$$ad+bc=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)$$

这样,这个代数等式的证明问题就转化成三角等式的证明题.

**证明**　设

$$a=\cos\alpha,b=\sin\alpha;c=\cos\beta,d=\sin\beta$$

由此条件式

$$ac-bd=0$$

就变为

$$\cos(\alpha+\beta)=0$$

因为

$$ad+bc=\sin(\alpha+\beta)$$

而

$$\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=1$$

所以

$$\sin^2(\alpha+\beta)=1$$

故

$$|\sin(\alpha+\beta)|=1$$

即

$$|ad+bc|=1$$

**例 2** 若 $a,b,c,d$ 为实数，且满足

$$\begin{cases}a^2+b^2=1\\x^2+y^2=1\\ax-by=1\end{cases}$$

求证

$$\begin{cases}a^2+y^2=1\\b^2+x^2=1\\ay+bx=0\end{cases}$$

**证明** 令

$$a=\cos\alpha, b=\sin\alpha; x=\sin\beta, y=\cos\beta$$

则

$$ax-by=\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta=\sin(\beta-\alpha)=1$$

故

$$\beta-\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{2}\quad(k\in\mathbf{Z},\mathbf{Z}\text{ 表示整数集})$$

即

$$\beta=2k\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\quad(k\in\mathbf{Z})$$

故有

$$a^2+y^2=\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

$$b^2+x^2=\sin^2\beta+\sin^2\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

$$ay+bx=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)=$$

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0$$

**例 3**　已知实数 $x,y,a,b$ 满足

$$x^2+y^2=1,a^2+b^2=1,x+y=\sqrt{2},a+\sqrt{3}b=2$$

求证：$ax-by=-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

**证明**　根据条件可设

$$x=\sin\alpha,y=\cos\alpha,a=\cos\beta,b=\sin\beta$$

则有

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$$

$$\cos\beta+\sqrt{3}\sin\beta=2$$

故

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1,\sin\left(\frac{\pi}{6}+\beta\right)=1$$

即

$$\alpha+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}\quad(k\in\mathbf{Z})$$

$$\frac{\pi}{6}+\beta=2l\pi+\frac{\pi}{2}\quad(l\in\mathbf{Z})$$

于是

$$\alpha-\beta+\frac{\pi}{12}=2(k-l)\pi$$

故

$$\alpha-\beta=2(k-l)\pi-\frac{\pi}{12}$$

所以

$$ax-by=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha-\beta)=$$

$$-\sin\frac{\pi}{12}=-\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=$$

$$-\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}}=-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

**例 4** 若 $x+y+z=xyz$,求证:

(1) $\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=$

$\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$;

(2) $\frac{3x-x^3}{1-3x^2}+\frac{3y-y^3}{1-3y^2}+\frac{3z-z^3}{1-3z^2}=$

$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\cdot\frac{3y-y^3}{1-3y^2}\cdot\frac{3z-z^3}{1-3z^2}$.

**分析** 若将(1)的两边都乘一个 2,则(1)与(2)都有一个特点,即三个代数式之和与这三个代数式之积相等.而条件式也是这个模式,在三角等式中,我们见过这样一个结论:

$\alpha,\beta,\gamma$ 满足等式

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma$$

的充要条件是 $\alpha+\beta+\gamma=n\pi(n\in\mathbf{Z})$.

上面的代数条件等式左边和右边的形状与这个三角等式恰好一致.又由于正切值可取一切实数,故可以设 $x=\tan\alpha,y=\tan\beta,z=\tan\gamma$,则条件式与求证式就可以转化为一个三角条件等式的证明题:

已知 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$,求证:

(1) $\frac{\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}+\frac{\tan\beta}{1-\tan^2\beta}+\frac{\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma}=$

$$\frac{4\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{(1-\tan^2\alpha)(1-\tan^2\beta)(1-\tan^2\gamma)};$$

(2) $\dfrac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}+\dfrac{3\tan\beta-\tan^3\beta}{1-3\tan^2\beta}+\dfrac{3\tan\gamma-\tan^3\gamma}{1-3\tan^2\gamma}=$

$\dfrac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}\cdot\dfrac{3\tan\beta-\tan^3\beta}{1-3\tan^3\beta}\cdot\dfrac{3\tan\gamma-\tan^3\gamma}{1-3\tan^3\gamma}.$

当我们联想到正切的二倍角公式和三倍角公式

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},\tan 3\alpha=\frac{3\tan-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

时,又可将命题进一步转化为:

已知 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$. 求证:

(1) $\tan 2\alpha+\tan 2\beta+\tan 2\gamma=\tan 2\alpha\tan 2\beta\tan 2\gamma$;

(2) $\tan 3\alpha+\tan 3\beta+\tan 3\gamma=\tan 3\alpha\tan 3\beta\tan 3\gamma$.

而命题(2)的证明是非常容易的.

**证明**　设

$$x=\tan\alpha,y=\tan\beta,z=\tan\gamma$$

已知条件变为

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

所以

$$\alpha+\beta+\gamma=n\pi\ (n\in\mathbf{Z})$$

故

$$2\alpha+2\beta+2\gamma=2n\pi$$
$$3\alpha+3\beta+3\gamma=3n\pi$$

所以

$$\tan 2\alpha+\tan 2\beta+\tan 2\gamma=\tan 2\alpha\tan 2\beta\tan 2\gamma$$
$$\tan 3\alpha+\tan 3\beta+\tan 3\gamma=\tan 3\alpha\tan 3\beta\tan 3\gamma$$

即

$$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}+\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}+\frac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma}=$$

$$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\cdot\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}\cdot\frac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma}$$

$$\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}+\frac{3\tan\beta-\tan^3\beta}{1-3\tan^2\beta}+\frac{3\tan\gamma-\tan^3\gamma}{1-3\tan^2\gamma}=$$

$$\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}\cdot\frac{3\tan\beta-\tan^3\beta}{1-3\tan^2\beta}\cdot\frac{3\tan\gamma-\tan^3\gamma}{1-3\tan^2\gamma}$$

亦即

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}+\frac{3y-y^3}{1-3y^2}+\frac{3z-z^3}{1-3z^2}=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\cdot\frac{3y-y^3}{1-3y^2}\cdot\frac{3z-z^3}{1-3z^2}$$

## 练习题

1. 若$\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}$,求证

$$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$$

2. 设 $a:b=c:d$,且 $a,b,c,d$ 均为正数,求证:

(1)$(a+b):(c+d)=\sqrt{a^2+b^2}:\sqrt{c^2+d^2}$;

(2)$\left(\dfrac{a^3}{b}+\dfrac{b^3}{a}\right):\left(\dfrac{c^3}{d}+\dfrac{d^3}{c}\right)=ab:cd$.

3. 设$\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$,求证

$$\frac{a^3}{x^3}+\frac{b^3}{y^3}+\frac{c^3}{z^3}=\frac{3(a+b+c)^3}{(x+y+z)^3}$$

4. 设$\dfrac{y+z}{b-c}=\dfrac{z+x}{c-a}=\dfrac{x+y}{a-b}$,试证左边各分数都等于

$$\pm\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}}$$

5. 已知$\begin{cases}ax+by=0\\cx^2+dxy+ey^2=0\end{cases}$,

求证：$a^2e+b^2c=abd$.

6. 若 $6^a=12^b=8^c$，求证：$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{3}{a}$.

7. 已知 $6^{2c}=3^{3b}=2^{6a}$，求证

$$3ab-bc-2ac=0$$

8. 若 $a,b,c$ 是正数，且满足 $a^x=b^y=c^z$，$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$，求证：$a=bc$.

9. 设 $ax^3=by^3=cz^3$，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$，

求证：$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$.

10. 证明：$\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{7}{3}}}=1$. 这里的两个三次方程根都是实数.

11. 若 $x+\dfrac{1}{x}=2\cos\theta$，$y+\dfrac{1}{y}=2\cos\varphi$，求证

$$x^my^n+\frac{1}{x^my^n}=2\cos(m\theta\pm n\varphi)$$

12. 已知 $\dfrac{p}{a}+\dfrac{q}{b}+\dfrac{r}{c}=1$，$\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q}+\dfrac{c}{r}=0$，

求证：$\dfrac{p^2}{a^2}+\dfrac{q^2}{b^2}+\dfrac{r^2}{c^2}=1$.

13. 有三个互不相等的复数 $x,y,z$，满足

$$\frac{2x-y}{z}=\frac{2y-z}{x}=\frac{2z-x}{y}=k$$

求证：$k=\dfrac{-1\pm3\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$　（其中 $\mathrm{i}^2=-1$）.

14. 设 $a,b,c$ 是互不相等的复数，且满足

$\dfrac{c}{a+2b}=\dfrac{a}{b+2c}=\dfrac{b}{c+2a}=k$，求证

$$k=-\frac{2+\omega}{3} \text{或} k=\frac{-1+\omega}{3}$$

其中 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

15.已知 $a-2b+3c-4d+4e=0$

$$b-c+d-3e=0$$

$$a+3b-3d+e=0$$

求证：$-7b+3c+d-3e=0$.

16.已知 $a,b,x,y$ 为实数，且满足 $x^2+y^2=1$，$a^2+b^2=1$，$ax+by=0$，求证：$ab+xy=0$.

17.已知 $x,y,z$ 为实数，且满足

$$\frac{x-y}{1+xy}+\frac{y-z}{1+yz}+\frac{z-x}{1+zx}=0$$

求证：$x,y,z$ 中至少有两个数相等.

# 推本溯源

## 第8章

推本溯源的意思是推求根本，追溯来源. 要证明代数等式，固然要掌握一定的数学思想方法，然而更重要的是要理解题中出现的数字、字母、符号的意义以及与其有关的性质. 否则代数等式的证明也就成了无本之木、无源之水. 这就是说，基础知识是证明代数等式的根本.

在这一章中，我们除了以证明代数等式的一般思路指导证题外，我们将着重以等式中出现的数字、字母、符号的含义为线索去探讨等式证明的思路，完成等式证明的任务.

### §1 集合等式的证法

用大写字母 $A, B, C, D, X, Y, Z$ 等表示集合，小写字母 $a, b, c, d, x, y, z$ 等表示集合中的元素.

集合的包含关系，相等关系的定义是

$$A \subset B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$$

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ 且 } B \subset A$$

在此，$x\in A$ 所表示的意思是 $x$ 是 $A$ 中的一个元素，读作 $x$ 属于集合 $A$.

两个集合 $A$ 与 $B$ 的并集、交集、差集的定义是

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$

若 $A\subset Z$，则 $A$ 关于 $Z$ 的补集(也称余集)，$\overline{A}$ 的定义是

$$\overline{A}=\{x\mid x\in Z \text{ 且 } x\notin A\}$$

集合的并、交、差、补的运算具有如下的性质：

(1)$A\cup A=A$，$A\cap A=A$(幂等性)；

(2)$A\cup \Phi=A$，$A\cap \Phi=\Phi$，$A\cap \overline{A}=\Phi$($\Phi$ 表空集)；

(3)$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$(交换律)；

(4)$(A\cup B)\cup C=A\cup (B\cup C)$；

$(A\cap B)\cap C=A\cap (B\cap C)$(结合律)；

(5)$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup (B\cap C)$；

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap (B\cup C)$(分配律)；

$(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)$；

(6)设 $Z$ 是集合，$A_i\subset Z(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\text{(和交关系)}$$

另外，从包含、并集、交集等概念的定义，我们可以直接获得如下一些性质：

(7)$A\cap B\subset A\subset A\cup B$，其中 $B$ 为一个任意集合.

(8)若 $A\subset B$，则 $A\cup C\subset B\cup C$，$A\cap C\subset B\cap C$. 其中 $C$ 为任意一个集合.

(9)若 $A_i\subset C(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset C$$

(10)$A\cap B=A$ 或 $A\cup B=B$ 的充要条件为 $A\subset B$.

以上所列诸性质,我们证明几个以做示范.从两个集合相等的定义可知,要证明集合 $A$ 与集合 $B$ 相等,则要证明 $A\subset B$ 且要证明 $B\subset A$.而要证明 $A\subset B$,可根据包含的定义,只要证明 $A$ 中的任何一个元素 $x\in A$,都有 $x\in B$.由此可见,集合等式的证明是与集合相等的定义密切相关的.因此,集合相等的定义也就直接规定了集合等式证明的方法.这也是我们使用"推本溯源"作为这一章的标题的用意所在.

**例 1**　设 $x\in \mathbf{R}$,$\mathbf{R}$ 是全体实数的集合.求证

$$\{x\mid 2x-6>0\}=\{x\mid x>3\}$$

**证明**　设 $x\in\{x\mid 2x-6>0\}\Rightarrow 2x-6>0\Rightarrow 2x>6$

$\Rightarrow x>3\Rightarrow x\in\{x\mid x>3\}$,

所以

$$\{x\mid 2x-6>0\}\subset\{x\mid x>3\}$$

设 $x\in\{x\mid x>3\}$

$\Rightarrow x>3\Rightarrow 2x>6$

$\Rightarrow 2x-6>0\Rightarrow x\in\{x\mid 2x-6>0\}$,

故

$$\{x\mid x>3\}\subset\{x\mid 2x-6>0\}$$

根据集合相等的定义即得

$$\{x\mid 2x-6>0\}=\{x\mid x>3\}$$

**例 2**　求证:$(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)$.

**证明**　设 $x\in(A-B)\cap C$

$\Rightarrow x\in A-B, x\in C$

$\Rightarrow x\in A, x\notin B, x\in C$

$\Rightarrow x\in A\cap C, x\notin B-C$

$\Rightarrow x\in(A\cap C)-(B\cap C)$,

所以

$$(A-B)\cap C\subset(A\cap C)-(B\cap C)$$

设 $x\in(A\cap C)-(B\cap C)$

$\Rightarrow x\in A\cap C, x\notin B\cap C$.

$\Rightarrow x\in A, x\in C, x\notin B$(否则 $x\in B$,因为 $x\in C\Rightarrow x\in B\cap C$与 $x\notin B\cap C$ 矛盾)

$\Rightarrow x\in A-B, x\in C$

$\Rightarrow x\in(A-B)\cap C$.

于是

$$(A\cap C)-(B\cap C)\subset(A-B)\cap C$$

根据集合相等的定义即得

$$(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)$$

**例 3** 求证:$(A-B)-C=A-(B\cup C)$.

**证明** 设 $x\in(A-B)-C$

$\Rightarrow x\in A-B, x\notin C$

$\Rightarrow x\in A, x\notin B, x\notin C$,

$\Rightarrow x\in A, x\notin B\cup C$

$\Rightarrow x\in A-(B\cup C)$.

所以

$$(A-B)-C\subset A-(B\cup C)$$

又设 $x\in A-(B\cup C)$

$\Rightarrow x\in A, x\notin B\cup C$,

$\Rightarrow x\in A, x\notin B, x\notin C$,

$\Rightarrow x\in A-B, x\notin C$

$\Rightarrow x\in(A-B)-C$.

所以

$$A-(B\cup C)\subset(A-B)-C$$

两方面的证明得

$$(A-B)-C=A-(B\cup C)$$

凡集合等式都可以像上面几例那样，从定义出发给予证明，但也可以利用前面所列出的一些运算法则进行证明. 这样集合等式的证明就与我们传统的数学等式证明很相似了.

**例 4**　求证：$(A-C)\cap(B-C)=(A\cap B)-C$.

**证明**　$(A-C)\cap(B-C)=$

$[A\cap(B-C)]-[C\cap(B-C)]$（据例 2）$=$

$[(A\cap B)-(A\cap C)]-[(C\cap B)-(C\cap C)]$（例 2）$=$

$[(A\cap B)-(A\cap C)]-[(C\cap B)-C]$（幂等性）$=$

$[(A\cap B)-(A\cap C)]-\Phi$（因为 $A\subset B\Rightarrow A-B=\Phi$）$=$

$(A\cap B)-(A\cap C)=$

$(A\cap B)-C$

**例 5**　求证：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

此等式是并对交的分配律公式. 假设我们承认性质(5)中的第一式成立，即交对并的分配律已成立，利用这个结果来证明本例.

**证明**　$(A\cup B)\cap(A\cup C)=$

$[(A\cup B)\cap A]\cup[(A\cup B)\cap C]=$

$A\cup[A\cap C]\cup(B\cap C)]$（据(10)，(5)）$=$

$[A\cup(A\cap C)]\cup(B\cap C)$（据(4)）$=$

$A\cup(B\cap C)$（据(10)）

## 练习题

1. 证明公式(1)～(10).

2. 求证下列等式：

(1)$A-B=A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$；

(2)$(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$；

(3)$A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$；

(4)$(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$.

3. 证明：$C\cap(B-C)=\varnothing$.

4. 举反例证明$(A\cup B)-B=A$并不成立；试证其成立的充要条件是$A\cap B=\varnothing$.

## §2 实数与复数的等式的证法

众所周知，实数集是复数集的一个真子集. 所以实数必然有一般复数所不具有的特性. 例如对于一个实数 $a$，它的平方就等于它的绝对值的平方：$a^2=|a|^2$. 但对一般的复数并不具有这个性质，如 $\mathrm{i}^2=-1$，而 $|\mathrm{i}|^2=1$，$\mathrm{i}^2\neq|\mathrm{i}|^2$. 对于一般的复数 $z$，$|z|^2=z\bar{z}$，其中 $\bar{z}$ 表示 $z$ 的共轭复数.

设 $z=a+b\mathrm{i}$，$\mathrm{i}^2=-1$，$a,b\in\mathbf{R}$（$\mathbf{R}$ 是实数集，则复数 $z$ 的模（绝对值）$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，它的辐角是

$$\theta=\arctan\frac{b}{a}+\varepsilon\pi+2k\pi(k\in Z)$$

其中当 $z$ 在复平面第一象限、第四象限时，$\varepsilon=0$；当 $z$ 在第二、三象限时，$\varepsilon=1$. $z$ 的共轭复数是 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$. 一个复数 $z$ 与它的共轭复数 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$ 之间有如下重要

关系

$$z\bar{z}=|z|^2\geqslant 0,\overline{z_1+\cdots+z_n}=\bar{z}_1+\cdots+\bar{z}_n$$

$$\overline{z_1\cdot\cdots\cdot z_n}=\bar{z}_1\cdot\cdots\cdot\bar{z}_n,\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},|z|=|\bar{z}|$$

$z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)$是一个实数，$z-\bar{z}=2I(z)$是一个纯虚数. 这里 $\mathrm{Re}(z)$和 $I(z)$分别表示 $z$ 的实部和虚部，$z=\mathrm{Re}(z)+I(z)$.

一个复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的实部与虚部系数与它的模的关系明显有$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$，$|z^n|=|z|^n$，$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$，$|z|\geqslant|a|$，$|z|\geqslant|b|$，并且$|z|=0\Leftrightarrow z=0\Leftrightarrow a=b=0$.

一个复数 $z_1=a+b\mathrm{i}$ 与另一个复数 $z_2=c+d\mathrm{i}$，它们之间不能比较大小，它们只有相等与不等的关系

$$z_1=z_2\Leftrightarrow a=c,b=d$$

$$z_1\neq z_2\Leftrightarrow a\neq c \text{ 或 } b\neq d$$

一个复数 $z$ 可以有许多表示法. $z=a+b\mathrm{i}$，$a,b\in\mathbf{R}$，是代数式；$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(r\geqslant 0)$，是三角式；$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(r\geqslant 0)$，是指数式；在复平面上又可以表示为点 $P(a,b)$以及向量$\overrightarrow{OP}$. 正因为复数有如此之多的表现形式，所以复数就有广泛的应用.

两个复数的加法、减法、乘法、除法、乘方、开方都具有重要的几何意义. 两个复数相加、减在几何上反映为平行四边形的对角线法的加法、减法. 例如，两个复数 $z_1,z_2$ 可以表示两个向量$\overrightarrow{Oz_1}$，$\overrightarrow{Oz_2}$，$z_1+z_2$ 就表示向量$\overrightarrow{O_{z_1+z_2}}$，四个点 $O,z_1,z_2,z_1+z_2$ 就构成一个平行四边形的四个角顶点. $\overrightarrow{O_{z_1+z_2}}$就是从原点到点 $z_1+z_2$ 的一条对角线向量，另一条对角线是$\overrightarrow{z_1z_2}$，如用复数表示

$\overrightarrow{z_1z_2}=z_2-z_1$，或$\overrightarrow{z_2z_1}=z_1-z_2$．而乘法、除法乃产生向量长度的伸长或缩短以及向量的逆时针或顺时针旋转．例如对于复数 $z$，当其乘以 5 或$\frac{1}{5}$时得到 $5z$ 或$\frac{1}{5}z$，这是将 $z$ 伸长或缩短为原来的 5 倍或$\frac{1}{5}$．当用 $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 去乘 $z$ 后得到的向量 $z(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，乃是将 $z$ 逆时针旋转了 $\theta$ 角所得的向量等．

当我们对诸如以上的性质有了明确的了解之后，解题就容易了．

**例 1**　设实数 $x,y$ 满足等式

$$(2x-1)^2+(y-8)^2=0$$

求证：$\log_8(xy)=\frac{2}{3}$．

**分析**　要证 $\log_8(xy)=\frac{2}{3}$，即要证 $xy=8^{\frac{2}{3}}=4$．要求得 $xy$，有两种可能性，一种是从条件式中直接求出 $xy$，另一种是先分别从条件式中求出 $x$ 及 $y$，然后再得到积 $xy$．本例所给的条件式并不是 $xy$ 的一个方程．甚至展开后连 $xy$ 的项都没有，故我们自然想到能否直接求出 $x,y$．然而常识告诉我们，要求两个未知数，一般需要两个独立的条件等式．而这里只有一个等式．仔细分析，条件式是平方和等于 0，而且 $x,y$ 都是实数，这能告诉我们什么呢？

**定理**　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是实数，则

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=0\Leftrightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n=0$$

**证明**　$\Leftarrow$的证明是明显的．

$\Rightarrow$设 $a_1^2+\cdots+a_n^2=0$，因为 $a_k$ 是实数，所以

$$a_k^2\geqslant 0(k=1,\cdots,n)$$

但

$$0 \leqslant a_k^2 \leqslant a_1^2 + \cdots + a_l^2 = 0$$

所以 $a_k^2=0$,故 $a_k=0(k=1,2,\cdots,n)$.

这个十分简单的定理,正说明了实数的特性,一般复数并没有这个性质.例如 $1^2+\mathrm{i}^2=0$,但 1 及 i 都不是 0.在等式证明中,常有像例 1 那样的问题,所给的条件或者是明显的,或者是隐蔽地呈现出实数平方的和等于 0.此时尽管条件式似乎只有一个等式,但其往往包含了一个以上的独立条件.

**证明**　因为 $x,y$ 是实数,而实数域对加、减、乘、除是封闭的,故 $2x-1$ 及 $y-8$ 也是实数.从而

$$(2x-1)^2+(y-8)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$2x-1=0, y-8=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}, y=8$$

代入 $\log_8(xy)$ 中即得

$$\log_8(xy)=\log_8 4=\frac{2}{3}$$

**例 2**　若 $x$ 和 $y$ 都是实数,而且

$$y=\frac{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-x^2}}{x+2}$$

求证:$\log_{\sqrt{2}}(x+y)=2$.

**证明**　因为 $x,y$ 均是实数,所以 $x^2-4\geqslant 0, 4-x^2\geqslant 0$.故 $x^2=4$,即 $x=\pm 2$.因为 $y$ 是实数,所以 $x=2$.代入 $y$ 的表达式中得 $y=0$.故

$$\log_{\sqrt{2}}(x+y)=\log_{\sqrt{2}}2=2$$

**例 3**　若 $(a+b+c)^2=3(ab+bc+ca)$,且 $a,b,c$ 为实数,求证:$a=b=c$.

**分析**　要证 $a=b=c$,即要证

$$a-b=b-c=c-a=0$$

要有一个条件式能导出三个结论，自然想到能否由条件导出三个实数 $a-b,b-c,c-a$ 的平方和等于 0.

**证明** $(a+b+c)^2=3(ab+bc+ca)$

所以

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$$

故

$$\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0$$

即

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

因 $a,b,c$ 是实数，故 $a-b,b-c,c-a$ 为实数. 由此得

$$a-b=b-c=c-a=0$$

即 $a=b=c$.

**例 4** 设 $a,b,x,y$ 均为实数，且 $\sqrt[3]{a+b\mathrm{i}}=x+y\mathrm{i}$，求证：$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=4(x^2-y^2)$.

**分析** 由 $\sqrt[3]{a+b\mathrm{i}}=x+y\mathrm{i}$ 可得

$$a+b\mathrm{i}=(x+y\mathrm{i})^3$$

即

$$a+b\mathrm{i}=(x^3-3xy^2)+(3x^2y-y^3)\mathrm{i}$$

因为实数对加、减、乘、除封闭，故 $x^3-3xy^2,3x^2y-y^3$ 都是实数. 又 $a,b$ 是实数，根据复数相等的定义，所给的条件式等价于

$$a=x^3-3xy^2$$
$$b=3x^2y-y^3$$

也就是在此条件下，求证：$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=4(x^2-y^2)$.

根据“按图索骥”所介绍的办法，只需将条件式的 $a,b$ 代入求证式左边即可.

**证明**　由条件式即得 $a=x^3-3xy^2,b=3x^2y-y^3$ 代入求证式左边得

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{x^3-3xy^2}{x}+\frac{3x^2y-y^3}{y}=$$

$$x^2-3y^2+3x^2-y^2=4(x^2-y^2)$$

**例 5**　求证

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$$

**证法 1**　设 $z_1=a+bi,z_2=c+di$，则

$$|z_1+z_2|^2=|(a+c)+(b+d)\mathrm{i}|^2=(a+c)^2+(b+d)^2$$

$$|z_1-z_2|^2=(a-c)^2+(b-d)^2$$

故

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=$$
$$(a+c)^2+(b+d)^2+(a-c)^2+(b-d)^2=$$
$$2(a^2+c^2)+2(b^2+d^2)=2(a^2+b^2)+2(c^2+d^2)=$$
$$2|z_1|^2+2|z_2|^2$$

**证法 2**　$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=$

$$(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}+(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})=$$
$$(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)+(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=$$
$$z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2+z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2-$$
$$z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2=$$
$$2z_1\bar{z}_1+2z_2\bar{z}_2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$$

**例 6**　求证：$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{2n}=\begin{cases}1 & (n\text{ 为偶数})\\ -1 & (n\text{ 为奇数})\end{cases}$.

**分析**　将 $(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i},(1-\mathrm{i})^2=-2\mathrm{i}$ 代入即可.

**证明**　$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{2n}=\left(\frac{2\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}}\right)^n=(-1)^n=$

$$\begin{cases}1 & (n\text{ 为偶数})\\ -1 & (n\text{ 为奇数})\end{cases}$$

**例 7** 求证

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n=\begin{cases}\pm\sqrt{2} & (n\text{ 为奇数})\\ \pm 2,0 & (n\text{ 为偶数})\end{cases}$$

**证明** 当 $n=2k$ 时,有

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n=\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{2k}+\left(\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{2k}=$$

$$\left(\frac{2\mathrm{i}}{2}\right)^k+\left(\frac{-2\mathrm{i}}{2}\right)^k=\mathrm{i}^k+(-\mathrm{i})^k=\mathrm{i}^k[1+(-1)^k]=$$

$$\begin{cases}\mathrm{i}^{4l}[1+(-1)^{4l}]=2 & (k=4l)\\ \mathrm{i}^{4l+2}[1+(-1)^{4l+2}]=-2 & (k=4l+2)\\ \mathrm{i}^{2l+1}[1+(-1)^{2l+1}]=\mathrm{i}^{2l+1}\cdot 0=0 & (k=2l+1)\end{cases}$$

当 $n=2k+1$ 时,有

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n=$$

$$\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{2k}+\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{2k}=$$

$$\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\cdot\mathrm{i}^k+\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\cdot(-\mathrm{i})^k=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[\mathrm{i}^k+(-\mathrm{i})^k]+\frac{1}{\sqrt{2}}[\mathrm{i}^{k+1}+(-\mathrm{i})^{k+1}]=$$

$$\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times 0=\sqrt{2} & (k=4l)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\times 0+\frac{1}{\sqrt{2}}\times(-2)=-\sqrt{2} & (k=4l+1)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\times(-2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\times 0=-\sqrt{2} & (k=4l+2)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\times 0+\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2=\sqrt{2} & (k=4l+3)\end{cases}$$

因此

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^n=\begin{cases}\pm\sqrt{2} & (n\text{ 为奇数})\\ \pm 2,0 & (n\text{ 为偶数})\end{cases}$$

**例 8**　设 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，求证

$$(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)=4$$

**分析**　1 的立方根 $\omega$ 具有下列常用的等式

$$\omega^3=1,\omega^2=\overline{\omega},1+\omega+\omega^2=0$$

利用这些性质本例即可解决.

**证明**　$(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)=$

$(-\omega-\omega)(-\omega^2-\omega^2)=$

$(-2\omega)(-2\omega^2)=4\omega^3=4$

**例 9**　已知 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，求证

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^n=\begin{cases}2 & (n=3k\text{ 时})\\ -1 & (n\neq 3k\text{ 时})\end{cases}$$

**证明**　$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^n=\omega^n+\omega^{2n}=$

$$\begin{cases}\omega^{3k}+\omega^{6k}=1+1=2 & (n=3k)\\ \omega^{3k+1}+\omega^{6k+2}=\omega+\omega^2=-1 & (n=3k+1)\\ \omega^{3k+2}+\omega^{6k+4}=\omega^2+\omega=-1 & (n=3k+2)\end{cases}$$

**例 10**　求证：1 的 $n$ 个 $n$ 次根式之和为 0.

**证明**　　　$1=\cos 0+\mathrm{i}\sin 0$

故

$$\sqrt[n]{\cos 0+\mathrm{i}\sin 0}=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\quad(k=0,1,\cdots,n-1)$$

记 $\xi=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$，则 $\xi^n=1$.

根据棣美弗(de Moirre)公式

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$$

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}=$$

$$\left(\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k=\xi^k\quad(k=0,1,\cdots,n-1)$$

故 1 的 $n$ 个 $n$ 次根为 $1,\xi,\xi^2,\cdots,\xi^{n-1}$.

由此

$$1+\xi+\xi^2+\cdots+\xi^{n-1}=\frac{1-\xi^n}{1-\xi}=\frac{1-1}{1-\xi}=0$$

**例 11** 已知 $\xi=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$,求证

$$1+2\xi+3\xi^2+\cdots+n\xi^{n-1}=-\frac{n}{1-\xi}$$

**证明** 记

$$P=1+2\xi+3\xi^2+\cdots+n\xi^{n-1}$$

则

$$\xi P=\xi+2\xi^2+\cdots+(n-1)\xi^{n-1}+n\xi^n$$

两式相减得

$$P(1-\xi)=1+\xi+\xi^2+\cdots+\xi^{n-1}-n\xi^n=-n$$

所以

$$P=-\frac{n}{1-\xi}$$

**例 12** 已知与复数 $z$ 及 $z'$ 相对应的向量是 $\overrightarrow{Oz}$ 及 $\overrightarrow{Oz'}$,求证:向量 $\overrightarrow{Oz}$ 与 $\overrightarrow{Oz'}$ 垂直的充要条件是 $\mathrm{Re}(z\bar{z}')=0$.

**分析** 利用复数乘法的几何意义.

**证明** $\Rightarrow$ 设 $\overrightarrow{Oz}\perp\overrightarrow{Oz'}$,则 $\overrightarrow{Oz}$ 与 $\overrightarrow{Oz'}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$. 由此

$$z=\varepsilon\cdot\frac{|z|}{|z'|}\cdot z'\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)\quad(\text{其中 }\varepsilon=\pm1)$$

所以

$$\bar{z}=\varepsilon\cdot\frac{|z|}{|z'|}\cdot\bar{z}'\left(\cos\frac{\pi}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

于是

$$\bar{z}\cdot z'=\varepsilon\cdot\frac{|z|}{|z'|}\cdot\bar{z}'z'\left(\cos\frac{\pi}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)=$$
$$\varepsilon\cdot\frac{|z|}{|z'|}\cdot|z'|^2\left(\cos\frac{\pi}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

故

$$\mathrm{Re}(zz')=\varepsilon|z||z'|\cos\frac{\pi}{2}=0$$

$\Leftarrow$设 $\mathrm{Re}(zz')=0$，又设$\overrightarrow{Oz}$与$\overrightarrow{Oz'}$的夹角为

$$\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

则

$$z=\varepsilon\cdot\frac{|z|}{|z'|}\cdot z'(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\quad(\varepsilon=\pm1)$$

所以

$$\bar{z}z'=\varepsilon\cdot\frac{|z|}{|z'|}\cdot\bar{z}'(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)\cdot z'=$$
$$\varepsilon\cdot|z|\cdot|z'|(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)$$

由此

$$\mathrm{Re}(\bar{z}z')=\varepsilon|z||z'|\cos\theta=0$$

所以 $\cos\theta=0$，也就是 $\theta=\frac{\pi}{2}$.

所以$\overrightarrow{Oz}\perp\overrightarrow{Oz'}$.

**例 13**　求证：三个复数 $z_1$，$z_2$，$z_3$ 组成一个等边三角形的三个顶点 $\Leftrightarrow z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=z_1^2+z_2^2+z_3^2$.

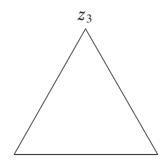

图 1

**证明**　如图 1，设 $z_1$，$z_2$，$z_3$ 为一个正三角形的三个顶点. 由于正

三角形的三内角都是 60°,故由向量$\overrightarrow{z_2z_3}$逆时针旋转 60°即与向量$\overrightarrow{z_2z_1}$重合,而得

$$z_1-z_2=(z_3-z_2)(\cos 60°+i\sin 60°) \qquad (1)$$

(因为$|z_1-z_2|=|z_3-z_2|$)

又因为向量$\overrightarrow{z_1z_2}$逆时针旋转 60°即和向量$\overrightarrow{z_1z_3}$重合,故得

$$z_3-z_1=(z_2-z_1)(\cos 60°+i\sin 60°) \qquad (2)$$

(因为$|z_3-z_1|=|z_2-z_1|$)

将式(1),式(2)相除即得

$$\frac{z_1-z_2}{z_3-z_1}=\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}$$

即

$$(z_1-z_2)(z_2-z_1)=(z_3-z_2)(z_3-z_1)$$

于是

$$z_1z_2-z_2^2-z_1^2+z_2z_1=z_3^2-z_3z_1-z_2z_3+z_2z_1$$

所以

$$z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=z_1^2+z_2^2+z_3^2$$

$\Leftarrow$设 $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=z_1^2+z_2^2+z_3^2$

则

$$(z_1-z_2)(z_2-z_1)=(z_3-z_2)(z_3-z_1)$$

即

$$(z_1-z_2)^2=(z_2-z_3)(z_3-z_1) \qquad (3)$$

由于条件式

$$z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=z_1^2+z_2^2+z_3^2$$

是 $z_1,z_2,z_3$ 的对称式,故同样有

$$(z_2-z_3)^2=(z_3-z_1)(z_1-z_2) \qquad (4)$$

$$(z_3-z_1)^2=(z_1-z_2)(z_2-z_3) \qquad (5)$$

(3)×$(z_1-z_2)$得

$$(z_1-z_2)^3=(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)$$

(4)$\times(z_2-z_3)$得

$$(z_2-z_3)^3=(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)$$

(5)$\times(z_3-z_1)$得

$$(z_3-z_1)^3=(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)$$

由此

$$(z_1-z_2)^3=(z_2-z_3)^3=(z_3-z_1)^3$$

所以

$$|z_1-z_2|^3=|z_2-z_3|^3=|z_3-z_1|^3$$

由于$|z_1-z_2|$,$|z_2-z_3|$,$|z_3-z_1|$都是实数,故

$$|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$$

此式正说明 $z_1,z_2,z_3$ 构成一个等边三角形的三个顶点.

**例 14**　求证:四个复数 $z_1,z_2,z_3,z_4$ 在复平面上所表示的点共圆$\Leftrightarrow\dfrac{(z_4-z_1)(z_2-z_3)}{(z_2-z_1)(z_4-z_3)}$是实数.

**证明**　如图 2,设向量$\overrightarrow{z_1z_4}$与向量$\overrightarrow{z_1z_2}$的夹角为 $\alpha$,向量$\overrightarrow{z_3z_2}$与向量$\overrightarrow{z_3z_4}$的夹角为 $\beta$. 则

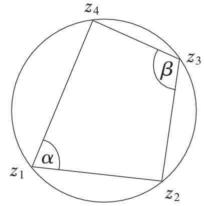

图 2

$$z_4-z_1=(z_2-z_1)\cdot\frac{|z_4-z_1|}{|z_2-z_1|}(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)\tag{6}$$

$$z_2-z_3=(z_4-z_3)\cdot\frac{|z_2-z_3|}{|z_4-z_3|}\cdot(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)\tag{7}$$

式(6),(7)相乘得

$$(z_4-z_1)(z_2-z_3)=$$

$$(z_2-z_1)(z_4-z_3)\cdot\frac{|z_4-z_1||z_2-z_3|}{|z_2-z_1||z_4-z_3|}\cdot$$

$$[\cos(\alpha+\beta)+\mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)] \tag{8}$$

$\Rightarrow$当 $z_1,z_2,z_3,z_4$ 在复平面上所表示的点共圆时，$\alpha+\beta=180°$，此时 $\cos(\alpha+\beta)+\mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)=-1$. 故

$$\frac{(z_4-z_1)(z_2-z_3)}{(z_2-z_1)(z_4-z_3)}=-\frac{|z_4-z_1||z_2-z_3|}{|z_2-z_1||z_4-z_3|} \tag{9}$$

式(9)右端是一个实数.

$\Leftarrow$当$\dfrac{(z_4-z_1)(z_2-z_3)}{(z_2-z_1)(z_4-z_3)}$是实数时，即得

$$\sin(\alpha+\beta)=0 \tag{10}$$

故 $\alpha+\beta=\pi$. 故 $z_1,z_2,z_3,z_4$ 在复平面上所表示的四点共圆.

**例 15** 求证

$$\sin 5\theta=5\cos^4\theta\sin\theta-10\cos^2\theta\sin^3\theta+\sin^5\theta$$

**证明** 设

$$z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$$

则

$$z^5=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^5=\cos 5\theta+\mathrm{i}\sin 5\theta$$

又

$$z^5=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^5=$$

$$\cos^5\theta+5\mathrm{i}\cos^4\theta\sin\theta+10\mathrm{i}^2\cos^3\theta\sin^2\theta+$$

$$10\mathrm{i}^3\cos^2\theta\sin^3\theta+5\mathrm{i}^4\cos\theta\sin^4\theta+\mathrm{i}^5\sin^5\theta=$$

$$(\cos^5\theta-10\cos^3\theta\sin^2\theta+5\cos\theta\sin^4\theta)+$$

$$\mathrm{i}(5\cos^4\theta\sin\theta-10\cos^2\theta\sin^3\theta+\sin^5\theta)$$

根据复数相等的定义即得

$$\sin 5\theta=5\cos^4\theta\sin\theta-10\cos^2\theta\sin^3\theta+\sin^5\theta$$

**例16**　求证

$$\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{7}+\arctan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

**分析**　本例是一个反三角等式的证明题.但由于复数有三角式,故可以借助于复数来证明.我们的思想是寻找这样几个复数,使它们的辐角分别是

$$\arctan\frac{1}{3},\arctan\frac{1}{5},\arctan\frac{1}{7},\arctan\frac{1}{8}$$

然后将这几个复数相乘,则积的辐角恰是这些辐角之和.若积的辐角正好是$\frac{\pi}{4}$.则问题即获得解决.

**证明**　令 $z_1=3+i,z_2=5+i,z_3=7+i,z_4=8+i$,则 $z_1,z_2,z_3,z_4$ 的辐角分别为

$$\arctan\frac{1}{3},\arctan\frac{1}{5},\arctan\frac{1}{7},\arctan\frac{1}{8}$$

而

$$\begin{aligned}z_1z_2z_3z_4={}&(3+i)(5+i)(7+i)(8+i)=\\&3\times5\times7\times8+(3\times5\times7+3\times5\times8+\\&3\times7\times8+5\times7\times8)i+(3\times5+\\&3\times7+3\times8+5\times7+5\times8+\\&7\times8)i^2+(3+5+7+8)i^3+i^4=\\&840+673i-191-23i+1=\\&650+650i=\\&650(1+i)\end{aligned}$$

显然,$1+i$ 的幅角是$\frac{\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

所以

$$\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{7}+\arctan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}+2k\pi$$

因为

$$0<\arctan\frac{1}{3}<\arctan 1=\frac{\pi}{4},0<\arctan\frac{1}{5}<\frac{\pi}{4}$$

$$0<\arctan\frac{1}{7}<\frac{\pi}{4},0<\arctan\frac{1}{8}<\frac{\pi}{4}$$

故

$$0<\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{7}+\arctan\frac{1}{8}<\pi$$

由此可知，$k=0$，所以

$$\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{7}+\arctan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

## 练习题

1.设 $a,b,x,y$ 均为实数.且

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}-a\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}-b\right)^2=0$$

求证：$b(b^2-3)=a$.

2.若 $a,b,c$ 是非负实数，且适合等式

$$a^2(a^2-b^2)+b^2(b^2-c^2)+c^2(c^2-a^2)=0$$

求证：$a=b=c$.

3.若 $a,b,c,d$ 都是实数，且满足

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2=4(ab+bc+cd)$$

求证：$a=b=c=d$.

4.若 $a,b,c,d$ 都是实数，且满足

$$a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$$

求证：$a=b=c=d$.

5.设 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，求证：

(1)$a^3+b^3=(a+b)(a\omega+b\omega^2)(a\omega^2+b\omega)$；

(2)$a^3-b^3=(a-b)(a-\omega b)(a-\omega^2 b)$;

(3)$1+\omega^n+\omega^{2n}=\begin{cases}3 & (n=3k)\\ 0 & (n\neq 3k)\end{cases}\quad (k\in\mathbf{Z})$;

(4)$(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n=2\cos\dfrac{n\pi}{3}$;

(5)$(1+\omega)^n\omega+(1+\omega^2)^n\omega^2=2\cos\dfrac{(n+2)\pi}{3}$.

6. 求证

$$(\cos 3\theta+\mathrm{i}\sin 3\theta)(\cos 2\theta-\mathrm{i}\sin 2\theta)=$$
$$(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)(\cos 4\theta-\mathrm{i}\sin 4\theta)$$

7. 求证:$\dfrac{1+\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta}{1+\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta}=\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta$.

8. 利用单位根证明:

(1) $x^{2n}-1=(x^2-1)\prod\limits_{k=1}^{n=1}(x^2-2x\cos\dfrac{k\pi}{n}+1)$;

(2) $x^{2n+1}+1=(x+1)\prod\limits_{k-1}^{n}(x^2+2x\cos\dfrac{2k\pi}{2n+1}+1)$;

(3)$1+\cos\dfrac{2}{n}\pi+\cos\dfrac{4}{n}\pi+\cdots+\cos\dfrac{2(n-1)}{n}\pi=$
$\sin\dfrac{2}{n}\pi+\sin\dfrac{4}{n}\pi+\cdots+\sin\dfrac{2(n-1)}{n}\pi=0\quad (n>1)$;

(4)$\sin\dfrac{\pi}{2n}\sin\dfrac{2\pi}{2n}\cdot\cdots\cdot\sin\dfrac{(n-1)\pi}{2n}=\dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}\quad (n>1)$;

(5)$\sin\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdot\cdots\cdot\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}=\dfrac{n}{2^{n-1}}\quad (n>1,$
$n\in\mathbf{N})$.

9. 在复平面上,如果一个正三角形的两个顶点是复数 $z_1$ 和 $z_2$ 所代表的点. 则第三个点为复数

$$-\omega z_1-\omega^2 z_2 \text{ 或} -\omega^2 z_1-\omega z_2$$

所代表的点. 其中

$$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$$

10. 在复平面上的正六边形 $ABCDEF$，其顶点 $A$ 所表示的复数为 $z_1=0$，$B$ 所表示的复数为 $z_2=4-3\mathrm{i}$，若点 $D$ 所表示的复数 $z_4$ 的实部 $\mathrm{Re}(z_4)>0$，求证：点 $C$ 所表示的复数

$$z_3=\left(6+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{9}{2}+2\sqrt{3}\right)\mathrm{i}$$

11. 利用复数证明：

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin[\alpha+(k-1)\beta]=$

$\dfrac{\sin\dfrac{n\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}}\sin\left[\alpha+\dfrac{(n-1)\beta}{2}\right]$；

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos[\alpha+(k-1)\beta]=$

$\dfrac{\sin\dfrac{n\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}}\cos\left[\alpha+\dfrac{(n-1)\beta}{2}\right]$.

12. 求证：

(1) $\arctan\dfrac{3}{4}+\arctan\dfrac{1}{7}=\dfrac{3\pi}{4}$；

(2) $\arctan\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\arctan 3=\dfrac{\pi}{4}$；

(3) $\arcsin\dfrac{3}{5}-\arccos\dfrac{12}{13}=\arcsin\dfrac{16}{65}$.

## §3　方程等式的证法

证明方程有关的等式所需要的知识主要有两点：

(1)方程根的定义，即若 $\alpha$ 是方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

的根，则有

$$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\alpha+a_n=0$$

(2)若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

的 $n$ 个根，则根与系数有如下关系

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=-\dfrac{a_1}{a_0}\\x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_2}{a_0}\\\qquad\vdots\\x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}\end{cases}$$

根据这两点知识以及等式的一般证明的方法，我们就可以顺利地进行有关方程的等式的证明了.

**例 1**　设 $\alpha,\beta$ 是方程 $x^2+px+1=0$ 的两个根，$\gamma$，$\delta$ 是方程 $x^2+qx+1=0$ 的两个根.求证

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2$$

**分析**　证明这个等式的线索有：方程的根与系数的关系，即

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-p\\\alpha\beta=1\end{cases}\quad\begin{cases}\gamma+\delta=-q\\\gamma\delta=1\end{cases}$$

另外求证式左边是根的因式积，右边是方程的一次项的系数的平方差.因此根据“按图索骥”的思路，只需将

求证式左边先转化为 $\alpha+\beta,\alpha\beta,\gamma+\delta,\gamma\delta$ 的多项式，然后利用条件转化为 $p,q$ 即可.

**证明** $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=$

$[(\alpha-\gamma)(\beta+\delta)][(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)]=$

$(\alpha\beta-\gamma\beta+\alpha\delta-\gamma\delta)(\beta\alpha-\gamma\alpha+\beta\delta-\gamma\delta)=$

$(\alpha\delta-\gamma\beta)(\beta\delta-\gamma\alpha)=$

$\alpha\beta\delta^2+\alpha\beta\gamma^2-\gamma\delta\alpha^2-\gamma\delta\beta^2=$

$\delta^2+\gamma^2-\alpha^2-\beta^2=$

$\delta^2+\gamma^2-(\alpha^2+\beta^2)=$

$\delta^2+2\delta\gamma+\gamma^2-(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)=$

$(\delta+\gamma)^2-(\alpha+\beta)^2=q^2-p^2$

**例 2** 三个方程

$$x^2-p_1x+q_1=0$$
$$x^2-p_2x+q_2=0$$
$$x^2-p_3x+q_3=0$$

每两个方程有一个公共根.求证

$p_1^2+p_2^2+p_3^2+4(q_1+q_2+q_3)=2(p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)$

**分析** 求证这个等式的线索是，根与系数的关系.

设$x^2-p_1x+q_1=0$ 的根为 $\alpha,\beta$;

$x^2-p_2x+q_2=0$ 的根为 $\beta,\gamma$;

$x^2-p_3x+q_3=0$ 的根为 $\gamma,\alpha$.

则

$$\alpha+\beta=p_1,\alpha\beta=q_1$$
$$\beta+\gamma=p_2,\beta\gamma=q_2$$
$$\gamma+\alpha=p_3,\gamma\alpha=q_3$$

对求证式采用“殊途同归”两边都化为 $\alpha,\beta,\gamma$ 的多项式，然后进行比较即可.

**证明** $p_1^2+p_2^2+p_3^2+4(q_1+q_2+q_3)=$

$(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\alpha)^2+4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=$

$2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3\alpha\beta+3\beta\gamma+3\gamma\alpha)$

$2(p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)=$

$2[(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)+(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)]=$

$2[\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3\alpha\beta+3\beta\gamma+3\gamma\alpha]$

故求证式成立.

**例 3**　方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根之和为 $s_1$，两根平方和为 $s_2$，两根立方和为 $s_3$. 求证

$$as_3+bs_2+cs_1=0$$

**证明**　设方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 $\alpha,\beta$，则 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$. 由此

$$s_1=-\frac{b}{a}$$

$$s_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}$$

$$s_3=a^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=$$

$$-\frac{b^3}{a^3}-3\cdot\frac{c}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)=$$

$$-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}$$

故

$$as_3+bs_2+cs_1=-\frac{b^3}{a^2}+\frac{3bc}{a}+\frac{b^3}{a^2}-\frac{2bc}{a}-\frac{bc}{a}=0$$

**例 4**　方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根是 $\alpha$ 和 $\beta$，设

$$s_n=\alpha^k+\beta^k\quad(k\in\mathbf{N})$$

求证：$as_k+bs_{k-1}+cs_{k-2}=0$.

**分析**　如果本例像例 3 一样去处理，那么计算量就会很大，如果我们根据方程的根的定义，则有

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0$$

$$a\beta^2+b\beta+c=0$$

故

$$a(\alpha^2+\beta^2)+b(\alpha+\beta)+2c=0$$

即

$$as_2+bs_1+2c=0$$

类似这样的做法,即可处理本例的求证式.

**证明** 由于

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \tag{1}$$

$$a\beta^2+b\beta+c=0 \tag{2}$$

$\alpha^{k-2}$乘以式(1)$+\beta^{k-2}$乘以式(2)得

$$a(\alpha^k+\beta^k)+b(\alpha^{k-1}+\beta^{k-1})+c(\alpha^{k-2}+\beta^{k-2})=0$$

即

$$as_k+bs_{k-1}+cs_{k-2}=0$$

**例 5** 方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的三个根是 $\alpha$, $\beta$,$\gamma$. 设 $s_k=\alpha^k+\beta^k+\gamma^k(k\in\mathbf{N})$,求证

$$as_k+bs_{k-1}+cs_{k-2}+ds_{k-3}=0$$

**证明** 因为

$$a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0 \tag{3}$$

$$a\beta^3+b\beta^2+c\beta+d=0 \tag{4}$$

$$a\gamma^3+b\gamma^2+c\gamma+d=0 \tag{5}$$

$\alpha^{k-3}$乘以(3)$+\beta^{k-3}$乘以(4)$+\gamma^{k-3}$乘以(5)得

$$a(\alpha^k+\beta^k+\gamma^k)+b(\alpha^{k-1}+\beta^{k-1}+\gamma^{k-1})+$$
$$c(\alpha^{k-2}+\beta^{k-2}+\gamma^{k-2})+d(\alpha^{k-3}+\beta^{k-3}+\gamma^{k-3})=0$$

即

$$as_k+bs_{k-1}+cs_{k-2}+ds_{k-3}=0$$

**例 6** 已知方程 $x^3-x^2+2x-3=0$,求证:$s_5=-4$.

**证明** 根据根与系数的关系,显然 $s_1=1$

$$s_2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=1-2\times2=-3$$

从例 5 知道

$$s_3-s_2+2s_1-3s_0=0 \tag{6}$$

而 $s_0=\alpha^0+\beta^0+\gamma^0=3$，故

$$s_3=s_2-2s_1+3s_0=-3-2+9=4$$

又

$$s_4-s_3+2s_2-3s_1=0 \tag{7}$$

$$s_5-s_4+2s_3-3s_2=0 \tag{8}$$

(6)+(7)+(8)得

$$s_5+2s_3-2s_2-s_1-3s_0=0$$

即

$$s_5=3s_0+s_1+2s_2-2s_3=9+1+2\times(-3)-2\times4=-4$$

## 练习题

1. 若方程 $x^2+px+q=0$ 的一根等于另一根的平方，求证：$p^3-q(3p-1)+q^2=0$.

2. 设 $\alpha,\beta$ 为方程 $x^2+mx+m^2+c=0$ 的两根，求证：$c^2+\alpha\beta+\beta^2+c=0$.

3. 设 $\alpha,\beta$ 为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，且有 $\alpha+2\beta=1$，求证：$a^2+2b^2+3ab+ac=0$.

4. 若方程 $ax^2+bx+a\sin\theta=0$ 有两个实根 $\alpha_1,\alpha_2$，方程 $ax^2+bx+a\cos\theta=0$ 有两个实根 $\beta_1,\beta_2$，求证

$$(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\beta_2)(\alpha_2-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)=1-\sin 2\theta$$

5. 已知方程 $x^2+px+q=0$ 的两根为 $\tan\alpha$ 和 $\tan\beta$，求证

$$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)=q$$

6. 若三次方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之一根为其余两根之和，求证：$p^3-4pq+8r=0$.

7.设 $a,b,c$ 是不相等的实数,且满足 $a^3+3a+14=0,b^3+3b+14=0,c^3+3c+14=0$,求证

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=-\frac{3}{14}$$

8.对于三次方程 $x^3-3x+1=0$,计算它的根的等次和 $s_1,s_2,s_3,s_4,s_5$.

## §4 含排列组合数的等式的证法

符号 $n!,A_m^n,C_m^n$ 有如下意义

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n;0!=1$$

$$A_m^n=m(m-1)\cdots(m-n+1)\quad(m\geqslant n>0)$$

$$C_m^n=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}=$$

$$\frac{m!}{n!(m-n)!}\quad(m\geqslant n\geqslant 0)$$

由它们的意义出发,易证如下性质:

(1)$(n+1)!=(n+1)\cdot n!$;

(2)$(2n)!=1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\cdot 2^n\cdot n!$;

(3)$C_m^n=C_m^{m-n}$;

(4)$C_{m+1}^n=C_m^n+C_m^{n-1}$.

牛顿二项式定理为

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n$$

由于其展开式中含组合数符号,故它在证明一些组合数等式中是十分有用的.由二项式定理可以直接获得如下公式:

(5)$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$;

(6)$C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\cdots+(-1)^nC_n^n=0$;

由(6)可得

(7)$C_n^0+C_n^2+\cdots=C_n^1+C_n^3+\cdots$;

由(5)和(7)可得

(8)$C_n^0+C_n^2+\cdots=C_n^1+C_n^3+\cdots=2^{n-1}$.

**例 1**　求证:$1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$.

**分析**　用拆差求和法,考虑到

$k\cdot k!=[(k+1)-1]\cdot k!=(k+1)!-k!$

令 $k=1,2,\cdots,n$,相加诸式即可.

**证明**　因为

$$k\cdot k!=(k+1)!-k!$$

故

$$1\cdot 1!=2!-1!$$
$$2\cdot 2!=3!-2!$$
$$3\cdot 3!=4!-3!$$
$$\vdots$$
$$n\cdot n!=(n+1)!-n!$$

上述 $n$ 个等式相加即得

$$1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$$

**例 2**　求证:$C_n^n+C_{n+1}^n+\cdots+C_{n+m}^n=C_{n+m+1}^{n+1}$.

**分析**　求证式左边最后一项与右边的上标、下标都相差 1. 考虑到公式(4),反复运用即可.

**证明**　$C_{n+m+1}^{n+1}=C_{n+m}^n+C_{m+n}^{n+1}=$

$C_{n+m}^n+C_{n+m-1}^n+C_{n+m-1}^{n+1}=$

$C_{n+m}^n+C_{n+m-1}^n+C_{n+m-2}^n+$

$C_{n+m-2}^{n+1}+\cdots=$

$C_{n+m}^n+C_{n+m-1}^n+\cdots+C_{n+1}^n+C_{n+1}^{n+1}=$

$C_{n+m}^n+C_{n+m-1}^n+\cdots+C_{n+1}^n+C_n^n$

**例 3** 求证

$$2^n-C_n^1\cdot 2^{n-1}+C_n^2\cdot 2^{n-2}+\cdots+$$
$$(-1)^{n-1}C_n^{n-1}\cdot 2+(-1)^n=1$$

**分析** 求证式左边乃$(2-1)^n$的展开式.

**证明** 因为

$$(2-1)^n=1$$

所以

$$2^n-C_n^1\cdot 2^{n-1}+C_n^2\cdot 2^{n-2}+\cdots+$$
$$(-1)^{n-1}C_n^{n-1}\cdot 2+(-1)^n=1$$

**例 4** 求证:$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n=n\cdot 2^{n-1}$.

**分析** 求证式左边有 $n$ 项,若将右边 $2^{n-1}=(1+1)^{n-1}$展开也是 $n$ 项.

$$n\cdot 2^{n-1}=n(1+1)^{n-1}=n(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+\cdots+C_{n-1}^{n-1})=$$
$$nC_{n-1}^0+nC_{n-1}^1+\cdots+nC_{n-1}^{n-1}$$

易见 $C_n^1=n\cdot C_{n-1}^0$,$2C_n^2=n(n-1)=nC_{n-1}^1$,$nC_n^n=nC_{n-1}^{n-1}$,故我们猜想对一般的 $k(1\leqslant k\leqslant n)$,是否有

$$kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$$

由此可得第一种证法.

另外,考虑$(1+x)^n$的展开式

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$$

若两边对 $x$ 求一次导数,即得

$$n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+\cdots+nC_n^nx^{n-1}$$

其正好出现 $C_n^1,2C_n^2,\cdots,nC_n^2$,令 $x=1$,又可得另一种证法.

**证法 1** $kC_n^k=k\cdot\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}=$

$$\frac{n(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!}=$$
$$nC_{n-1}^{k-1}$$

令 $k=1,2,\cdots,n$ 得

$$C_n^1=nC_{n-1}^0,2C_n^2=nC_{n-1}^1$$
$$3C_n^3=nC_{n-1}^2\cdots nC_n^n=nC_{n-1}^{n-1}$$

诸式相加即得

$$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n=$$
$$n(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+\cdots+C_{n-1}^{n-1})=$$
$$n(1+1)^{n-1}=n\cdot 2^{n-1}$$

**证法 2**　$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$

两边对 $x$ 求导函数得

$$n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+\cdots+nC_n^nx^{n-1}$$

令 $x=1$ 得

$$n\cdot 2^{n-1}=C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n$$

**例 5**　求证

$$C_n^1\cdot 1^2+C_n^2\cdot 2^2+C_n^3\cdot 3^2+\cdots+C_n^n\cdot n^2=$$
$$n(n+1)2^{n-2}\quad (n\geqslant 2)$$

**证法 1**　$C_n^k\cdot k^2=k(k-1)C_n^k+kC_n^k=$

$$n(n-1)C_{n-2}^{k-2}+nC_{n-1}^{k-1}\quad (k\geqslant 2)$$

由此

$$C_n^1\cdot 1^2+C_n^2\cdot 2^2+C_n^3\cdot 3^2+\cdots+C_n^n\cdot n^2=$$
$$C_n^1\cdot 1^2+[n(n-1)C_{n-2}^0+nC_{n-1}^1]+$$
$$[n(n-1)C_{n-2}^1+nC_{n-1}^2]+\cdots+$$
$$[n(n-1)C_{n-2}^{n-2}+nC_{n-1}^{n-1}]=$$
$$n+n(n-1)(C_{n-2}^0+C_{n-2}^1+\cdots+C_{n-2}^{n-2})+$$
$$n(C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\cdots+C_{n-1}^{n-1})=$$
$$n(n-1)2^{n-2}+n\cdot 2^{n-1}=$$
$$[n(n-1)+2n]\cdot 2^{n-2}=$$
$$n(n+1)2^{n-2}$$

**证法 2**　$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^kx^k+\cdots+C_n^nx^n$. 两边对 $x$ 求二次导数得

$$n(n-1)(1+x)^{n-2}=2\cdot 1\cdot C_n^2+\cdots+k(k-1)C_n^kx^{k-2}+\cdots+n(n-1)C_n^nx^{n-2}\qquad(1)$$

令 $x=1$ 得

$$n(n-1)\cdot 2^{n-2}=2\cdot 1\cdot C_n^2+\cdots+k(k-1)C_n^k+\cdots+n(n-1)C_n^n\qquad(2)$$

又

$$n\cdot 2^{n-1}=C_n^1+2C_n^2+\cdots+kC_n^k+\cdots+nC_n^n\qquad(3)$$

式(2),(3)相加得

$$n(n-1)\cdot 2^{n-2}+n\cdot 2^{n-1}=C_n^1+2^2C_n^2+\cdots+k^2C_n^k+\cdots+n^2C_n^n$$

所以

$$C_n^1+2^2\cdot C_n^2+\cdots+k^2C_n^k+\cdots+n^2C_n^n=n(n+1)2^{n-2}$$

**例 6**　求证：

(1)$1+C_n^3+C_n^5+\cdots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$；

(2)$C_n^2+C_n^5+C_n^8+\cdots=\frac{1}{3}\left[2^n+2\cos\frac{(n+2)\pi}{3}\right]$.

**证明**　(1)$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$　①

记 $x^3=1$ 的三个根为 $1,\omega,\omega^2$,将它们代入式①中的 $x$ 得

$$2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n\qquad②$$

$$(1+\omega)^n=C_n^0+C_n^1\omega+C_n^2\omega^2+\cdots+C_n^n\omega^n\qquad③$$

$$(1+\omega^2)^n=C_n^0+C_n^1\omega^2+C_n^2\omega^4+\cdots+C_n^n\omega^{2n}\qquad④$$

将个等式②,③,④相加得

$2^n+(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n=$

$3C_n^0+C_n^1(1+\omega+\omega^2)+C_n^2(1+\omega^2+\omega^4)+\cdots+$

$C_n^k(1+\omega^k+\omega^{2k})+\cdots+C_n^n(1+\omega^n+\omega^{2n})$

因为当 $k=3p$ 时

$$1+\omega^k+\omega^{2k}=3$$

$k\neq 3p$ 时，$1+\omega^k+\omega^{2k}=0$（见复数练习题 5(3)）.

故

$$2^n+(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n=3(C_n^0+C_n^3+C_n^3+\cdots)$$

故

$$C_n^0+C_n^3+C_n^6+\cdots=\frac{1}{3}[2^n+(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n]=$$

$$\frac{1}{3}\left[2^n+\left(1+\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n+\right.$$

$$\left.\left(1+\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^n\right]=$$

$$\frac{1}{3}\left\{2^n+\left[2\cos\frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^n+\right.$$

$$\left.\left[2\cos\frac{2\pi}{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^n\right\}=$$

$$\frac{1}{3}\left\{2^n+\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n+\left(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3}\right)^n\right\}=$$

$$\frac{1}{3}\left[2^n+\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}+\cos\frac{-n\pi}{3}+i\sin\frac{-n\pi}{3}\right]=$$

$$\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$$

（2）对证（1）中所得的③，④分别乘以 $\omega,\omega^2$ 得

$$2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^n \quad ⑤$$

$$\omega(1+\omega)^n=C_n^0\omega+C_n^1\omega^2+C_n^2\omega^3+C_n^3\omega^4+\cdots+C_n^k\omega^{k+1}+\cdots+C_n^n\omega^{n+1} \quad ⑥$$

$$\omega^2(1+\omega^2)^n=C_n^0\omega^2+C_n^1\omega^4+C_n^2\omega^6+C_n^3\omega^8+\cdots+C_n^k\omega^{2(k+1)}+\cdots+C_n^3\omega^{2(n+1)} \quad ⑦$$

式⑤,⑥,⑦相加得

$$2^n+(1+\omega)^n\omega+(1+\omega^2)^n\omega^2=$$
$$C_n^0(1+\omega+\omega^2)+C_n^1(1+\omega^2+\omega^4)+$$
$$C_n^2(1+\omega^3+\omega^6)+C_n^3(1+\omega^4+\omega^8)+\cdots+$$
$$C_n^k(1+\omega^{k+1}+\omega^{2(k+1)})+\cdots+C_n^n(1+\omega^{n+1}+\omega^{2(n+1)})$$

因为

$$1+\omega^{k+1}+\omega^{2(k+1)}=\begin{cases}0 & (\text{当 } k=3p,3p+1)\\ 3 & (\text{当 } k=3p+2)\end{cases}\quad (p\in\mathbf{N})$$

故

$$2^n+(1+\omega)^n\omega+(1+\omega^2)^n\omega^2=3(C_n^2+C_n^5+C_n^8+\cdots)$$

于是

$$C_n^2+C_n^5+C_n^8+\cdots=\frac{1}{3}[2^n+(1+\omega)^n\omega+(1+\omega^2)^n\omega^2]=$$
$$\frac{1}{3}\left[2^n+2\cos\frac{(n+2)\pi}{3}\right]$$

(见复数练习题 5(5)).

**例 7** 求证:$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2=\dfrac{(2n)!}{n!\ n!}$.

**分析** $(1+x)^n$ 的展开式的系数只是组合数的一次式,要出现二次,则可以将两个$(1+x)^n$ 相乘.

$$(1+x)^{2n}=(1+x)^n(x+1)^n=$$
$$(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+$$
$$C_n^nx^n)\cdot(C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+$$
$$C_n^2x^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}x+C_n^n) \tag{3}$$

因为

$$\frac{(2n)!}{n!\ n!}=C_{2n}^n$$

而在$(1+x)^{2n}$中含 $C_{2n}^n$ 的项恰是其展开式中的含

$x^n$ 的项. 若用分配律对式(3)右边的两个多项式乘开时，$x^n$ 的系数恰是

$$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2$$

由于$(1+x)^n(x+1)^n=(1+x)^{2n}$是 $x$ 的恒等式，根据多项式恒等定理，对应项系数相等，即可得到求证式.

**证明**　因为

$$(1+x)^n(x+1)^n=(1+x)^{2n}$$

故

$$(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n)(C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+\cdots+C_n^n)=C_{2n}^0+C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+\cdots+C_{2n}^3x^n+\cdots+C_{2n}^{2n}x^{2n} \tag{4}$$

比较恒等式(4)两边 $x^n$ 的系数即得

$$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n=\frac{(2n)!}{n!\ n!}$$

**例 8**　求证

$$C_5^0\cdot C_{10}^0+C_5^1\cdot C_{10}^1+C_5^2C_{10}^2+C_5^3C_{10}^3+C_5^4C_{10}^4+C_5^5C_{10}^5=3\,003$$

**证明**　因为

$$(1+x)^5(1+x)^{10}=(1+x)^{15} \tag{5}$$

故

$$(C_5^0+C_5^1x+C_5^2x^2+C_5^3x^3+C_5^4x^4+C_5^5x^5)(C_{10}^0x^{10}+C_{10}^1x^9+C_{10}^2x^8+C_{10}^3x^7+\cdots+C_{10}^{10})=(C_{15}^0+C_{15}^1x+\cdots+C_{15}^{10}x^{10}+\cdots+C_{15}^{15}x^{15}) \tag{6}$$

比较式(6)两边 $x^{10}$ 的系数即得

$$C_5^0C_{10}^0+C_5^1C_{10}^1+C_5^2C_{10}^2+C_5^3C_{10}^3+C_5^4C_{10}^4+C_5^5C_{10}^5=C_{15}^{10}=C_{15}^5=\frac{15\times14\times13\times12\times11}{5\times4\times3\times2\times1}=3\,003 \tag{7}$$

**例 9**　求证

$$C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\cdots+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$$

**分析** 例 4 的组合数前乘以一个自然数，可用求导数的方式解决，本例的组合数前是除以一个相应的自然数，故可用积分来解决.

**证明** $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+\cdots+C_n^kx^k+\cdots+C_n^nx^n \qquad (8)$

式(8)两边对 $x$ 由 0 到 $x$ 积分得

$$\int_0^x(1+x)^n\mathrm{d}x=\int_0^x(C_n^0+\cdots+C_n^kx^k+\cdots+C_n^nx^n)\mathrm{d}x$$

即

$$\frac{1}{n+1}[(1+x)^{n+1}-1]=C_n^0x+\frac{1}{2}C_n^1x^2+\frac{1}{3}C_n^2x^3+\cdots+\frac{1}{k+1}C_n^kx^{k+1}+\cdots+\frac{1}{n+1}C_n^nx^{n+1}$$

令 $x=1$ 即得

$$C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\cdots+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$$

## 练习题

1. 求证：$C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+2^3C_n^3+\cdots+2^nC_n^n=3^n$.

2. 求证

$$3^nC_n^0-3^{n-1}C_n^1+3^{n-2}C_n^2+\cdots+(-1)^k3^{n-k}C_n^k+\cdots+(-1)^nC_n^n=2^n$$

3. 求证

$$C_n^1\cdot1^3+C_n^2\cdot2^3+\cdots+C_n^k\cdot k^3+\cdots+C_n^nn^3=n^2(n+3)\cdot2^{n-3}$$

4. 求证：$1+C_n^4+C_n^8+\cdots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$.

(揭示 $1+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3=0$，类似于例 6，将 $1,-1,\mathrm{i}$,

$-\mathrm{i}$分别代入$(1+x)^n$的展开式中）

5.求证

$C_m^0C_n^k+C_m^1C_n^{k-1}+C_m^2C_n^{k-2}+\cdots+C_m^kC_n^0=C_{n+m}^k$

（揭示$(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{n+m}$）

6.求证：

(1)$n(n-1)C_n^0-(n-1)(n-2)C_n^1+\cdots+(-1)^{n-2}2\cdot 1\cdot C_n^{n-2}=0$；

(2)$1-\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\cdots+(-1)^k\frac{1}{k+1}C_n^k+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}C_n^{n-1}=$

$$\begin{cases}\frac{2}{n+1} & （当\ n=2p+1\ 时）\\ 0 & （当\ n=2p\ 时）\end{cases}\quad (p\in\mathbf{N}).$$

## §5　数列等式的证法

一个数列记为$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$.它的前$n$项和记为$s_n$,即$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,则明显有

$$a_n=s_n-s_{n-1}$$

在中学阶段,我们主要研究了两个最典型、最基本的数列;等差数列和等比数列.

在数列$\{a_n\}$中,若对一切$n$,总有$a_{n+1}-a_n=d$,其中$d$是一个常数,则称$\{a_n\}$为等差数列.若对一切$n$,总有$a_{n+1}=a_nq$,其中$q$是常数,则称$\{a_n\}$是等比数列.上面提到的$d$及$q$分别称为等差数列及等比数列的公差和公比.

关于等差数列与等比数列以及它们的性质在证题中常用到,故特列表如下(表1).

**表 1**

| 内容 \ 数列 | 等差数列 | 等比数列 |
|---|---|---|
| 定义 | $a_{n+1}-a_n=d$ | $a_{n+1}=a_nq$ |
| 通项 | $a_n=a_1+(n-1)d$ | $a_n=a_1q^{n-1}$ |
| 性质 | 当 $k+l=m+n$ 时 $a_k+a_l=a_m+a_n$ | 当 $k+l=m+n$ 时 $x_ka_l=a_ma_n$ |
| 前 $n$ 项和 | $s_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$ | $s_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ |

**例 1** 设 $\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}$ 成等差数列，求证

$\log_a(x+z)+\log_a(x-2y+z)=2\log_a(x-z)$

**分析** 实际上，本例是在条件式

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$$

之下，求证：$(x+z)(x-2y+z)=(x-z)^2$.

由于求证式左边有 $y$，右边没有 $y$，按图索骥，由条件式得 $2y=\frac{4xz}{x+z}$ 代入左边即可.

**证明** 因为 $\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}$ 成等差数列，故有

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$$

即

$$2y=\frac{4xz}{x+z}$$

代入求证式左边得

左边 $=\log_3(x+z)+\log_a\left(x+z-\dfrac{4xz}{x+z}\right)=$

$$\log_a(x+z)+\log_a\frac{(x-z)^2}{x+z}=$$
$$\log_a(x-z)^2=\text{右边}$$

**例 2**　已知 $a,b,c,d$ 成等比数列，求证

$$(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2=(a-d)^2$$

**分析**　如果我们设这个数列的首项是 $a$，公比是 $q$，则有 $b=aq,c=aq^2,d=aq^3$，代入左边逐步化简即可求得右边，但计算较繁，如果根据数列的等比性，即给出条件式 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{e}$. 在此条件，考虑到求证式左边有 $b,c$，右边没有 $b,c$，按这个线索去“按图索骥”，将左边展开，然后利用条件式，将含 $b,c$ 的项转化为含 $a,d$ 的项，即可达到证明目的.

**证明**　因为 $a,b,c,d$ 成等比数列，故有

$$\text{左边}=a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2+b^2-2bd+d^2=$$
$$a^2+2b^2+2c^2-2ac-2bc-2bd+d^2=$$
$$a^2+2ac+2bd-2ac-2ad-2bd+d^2=$$
$$a^2-2ad+d^2=(a-d)^2=\text{右边}$$

**例 3**　设 $a,b,c$ 成等差数列，正数 $x,y,z$ 成等比数列，求证

$$(b-c)\lg x+(c-a)\lg y+(a-b)\lg z=0$$

**证明**　令 $a,b,c$ 的公差为 $d$，则有

$$b-c=-d,c-a=2d,a-b=-d$$

代入求证式左边得

$$\text{左边}=-d\lg x+2d\lg y-d\lg z=$$
$$d(2\lg y-\lg x-\lg z)=$$
$$d\lg\frac{y^2}{xz}=d\lg 1=0=\text{右边}$$

（因为 $x,y,z$ 成等比数列，所以 $y^2=xz,\frac{y^2}{xz}=1$）

**例 4** 证明：对于等差数列有

$$\frac{s_p}{p}(n-k)+\frac{s_n}{n}(k-p)+\frac{s_k}{k}(p-n)=0$$

**分析** 在求证式中和数字有关的公式有

$$a_i-a_j=d(\mathrm{i}-\mathrm{j})$$

因此

$$\mathrm{i}-\mathrm{j}=\frac{1}{d}(a_i-a_j)$$

另一方面，$\frac{s_i}{\mathrm{i}}=\frac{1}{\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{i}(a_1+a_i)=\frac{1}{2}(a_1+a_i)$，当我们将求证式的左边都用 $a_i$ 来表示时，有理由相信合并同类项后即为 0.

**证明**

$$(\mathrm{i}-\mathrm{j})=\frac{1}{d}(a_i-a_j)$$

$$\frac{s_i}{\mathrm{i}}=\frac{1}{2}(a_1+a_i)$$

代入求证式左边得

$$\begin{aligned}
\text{左边}=&\frac{1}{2}(a_1+a_p)\cdot\frac{1}{d}(a_n-a_k)+\\
&\frac{1}{2d}(a_1+a_n)(a_k-a_p)+\frac{1}{2d}(a_1+a_k)(a_p-a_n)=\\
&\frac{1}{2d}[(a_1+a_p)(a_n-a_k)+\\
&(a_1+a_n)(a_k-a_p)+(a_1+a_k)(a_p-a_n)]=\\
&\frac{1}{2d}\cdot 0=0=\text{右边}
\end{aligned}$$

**例 5** 设有 $p$ 个数列，它们的首项分别为 1，2，3，…，$p$，公差分别为 1，3，5，…，$(2p-1)$. 若以 $s_1$，$s_2$，…，$s_p$ 分别表示这 $p$ 个数列的前 $n$ 项的和.（$p<n$），则

$$s_1+s_2+\cdots+s_p=\frac{1}{2}np(np+1)$$

**证明**　$s_1=1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

$$s_1=2+5+8+\cdots+(3n-1)=\frac{1}{2}n(3n+1)$$

$$s_3=3+8+13+\cdots+(5n-2)=\frac{1}{2}n(5n+1)$$

$$\vdots$$

$$s_p=p+(p+2p-1)+\cdots+[p+(n-1)(2p-1)]=$$

$$\frac{n}{2}[n(2p-1)+1]$$

由此

$$s_1+s_2+\cdots+s_p=$$

$$\frac{n}{2}[(n+1)+(3n+1)+\cdots+(n(2p-1)+1)]=$$

$$\frac{n}{2}[n+3n+\cdots+(2p-1)n+p]=$$

$$\frac{n}{2}\left[\frac{p}{2}(n+(2p-1)n)+p\right]=$$

$$\frac{n}{2}[np^2+p]=\frac{1}{2}np(np+1)$$

**例 6**　在等差数列$\{a_n\}$中，以 $s_n$ 表示其前 $n$ 项之和，且有

$$s_n:s_m=n^2:m^2$$

求证：$a_n:a_m=(2n-1):(2m-1)$.

**证明**　因为

$$s_n:s_m=n^2:m^2$$

故

$$\frac{a_1+a_n}{a_1+a_m}=\frac{n}{m}$$

又因为

$$a_n=a_1+(n-1)d, a_m=a_1+(m-1)d$$

所以消去 $d$ 后可得

$$a_1=\frac{(m-1)a_n-(n-1)a_m}{m-n}$$

故

$$a_1+a_n=\frac{(2m-n-1)a_n-(n-1)a_m}{m-n}$$

$$a_1+a_m=\frac{(m-1)a_n-(2n-m-1)a_m}{m-n}$$

由此

$$\frac{(2m-n-1)a_n-(n-1)a_m}{(m-1)a_n-(2n-m-1)a_m}=\frac{n}{m}$$

去分母整理后得

$$(n-m)(2n-1)a_m=(n-m)(2m-1)a_n$$

当 $n-m\neq 0$ 时,即得

$$\frac{a_n}{a_m}=\frac{2n-1}{2m-1}$$

而当 $n=m$ 时,$\frac{a_n}{a_m}=\frac{2n-1}{2m-1}$显然成立.

故

$$a_n:a_m=(2n-1):(2m-1)$$

**例 7** 若 $s_n, s_{2n}, s_{3n}$ 是同一个等比数列的前 $n$ 项、$2n$ 项、$3n$ 项之和.求证

$$s_n(s_{3n}-s_{2n})=(s_{2n}-s_n)^2$$

**证明** $s_n(s_{3n}-s_{2n})=$

$\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}\cdot\left[\frac{a_1(q^{3n}-1)}{q-1}-\frac{a_1(q^{2n}-1)}{q-1}\right]=$

$\frac{a_1^2}{(q-1)^2}\cdot(q^n-1)(q^{3n}-q^{2n})=$

$$\frac{a_1^2q^{2n}}{(q-1)^2}(q^n-1)^2$$

而

$$(s_{2n}-s_n)^2=\left[\frac{a_1(q^{2n}-1)}{q-1}-\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}\right]^2=$$

$$\frac{a_1^2}{(q-1)^2}(q^{2n}-q^n)^2=$$

$$\frac{a_1^2q^{2n}}{(q-1)^2}(q^n-1)^2$$

所以

$$s_n(s_{3n}-s_{2n})=(s_{2n}-s_n)^2$$

**例 8**　若 $s$ 是无穷递减等比数列 $1,a^p,a^{2p},\cdots,a^{(n-1)p},\cdots$的和；$s_1$ 是无穷递减等比数列 $1,a^q,a^{2q},\cdots,a^{(n-1)q},\cdots$的和，则 $s^q(s_1-1)^p=s_1^p(s-1)^q$.

**证明**　因为

$$s=\frac{1}{1-a^p},s_1=\frac{1}{1-a^q}$$

看求证式，我们先计算出 $s-1$ 和 $s_1-1$

$$s-1=\frac{a^p}{1-a^p},s_1-1=\frac{a^q}{1-a^q}$$

这样

$$s_1^p(s-1)^q=\frac{1}{(1-a^q)^p}\cdot\frac{a^{pq}}{(1-a^p)^q}$$

$$s^q(s_1-1)^p=\frac{1}{(1-a^p)^q}\cdot\frac{a^{pq}}{(1-a^q)^p}$$

所以

$$s^q(s_1-1)^p=s_1^p(s-1)^q$$

**例 9**　若 $x\neq1$，求证

$$x+2x^2+3x^3+\cdots+px^p=\frac{x-(p+1)x^{p+1}+px^{p+2}}{(1-x)^2}$$

**证明** 用证明等比数列的求和公式的方法来证明本例.

设

$$s=x+2x^2+3x^2+\cdots+px^p \tag{1}$$

则

$$xs=x^2+2x^3+3x^4+\cdots+px^{p+1} \tag{2}$$

式(1),(2)相减可得

$$(1-x)s=x+x^2+x^3+\cdots+x^p-px^{p+1} \tag{3}$$

因为 $x\neq1$,根据等比数列的求和公式有

$$(1-x)s=\frac{x(1-x^p)}{1-x}-px^{p+1} \tag{4}$$

所以

$$s=\frac{x-x^{p+1}}{(1-x)^2}-\frac{px^{p+1}}{1-x}=\frac{x-(p+1)x^{p+1}+px^{p+2}}{(1-x)^2} \tag{5}$$

以上着重讨论了等差数列和等比数列的等式证法. 在这些证明中,除了由等差数列和等比数列的定义及性质本身决定了问题的证法外,还经常用到了在本书开篇提出的证题核心思想方法“按图索骥”. 然而作为数列这个专题本身又有其特殊性,因而有许多有关数列问题的证法,又具有其特殊的手法. 例如等差数列的通项公式的证明. 根据等差数列的定义可得

$$a_2-a_1=d,a_3-a_2=d,\cdots,a_n-a_{n-1}=d$$

上面 $n-1$ 个等式相加即得 $a_n-a_1=(n-1)d$,即 $a_n=a_1+(n-1)d$;而对等比数列的通项公式的证明,由定义可得

$$a_2=a_1q,a_3=a_2q,\cdots,a_n=a_{n-1}q$$

上面 $n-1$ 个等式相乘即得 $a_n=a_1q^{n-1}$. 这种加与乘的手法,追溯其根本,乃是“按图索骥”. 因为结论要求建立 $a_n$ 与 $a_1$ 的关系. 而定义是 $a_n$ 与 $a_{n-1}$ 的关系. 故应

采用恰当的方法将 $a_n$ 过渡到 $a_1$，这就要求消掉中间的 $a_2,\cdots,a_{n-1}$. 等差数列用的是相加，而等比数列使用的恰是相乘.

上面提到的方法，不仅对等差数列或等比数列有效. 对于某些其他类型的数列问题，这个思想方法也是十分有用的. 我们看到例 9 并不是等比数列，但它恰可以应用等比数列的求和公式的证明方法来证明. 除此以外，某些数列的求和问题还可以用拆差法

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=$$
$$(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_{n+1}-b_n)=$$
$$b_{n+1}-b_n$$

来解决. 当然，在这里关键是针对数列 $\{a_n\}$，能找到数列 $\{b_n\}$，使 $a_k=b_{k+1}-b_k(k=1,2,\cdots)$. 若能找到，问题也就自然解决了. 为了使读者熟悉这种思想方法，我们举出一些例子予以说明.

**例 10**　已知 $\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\cdots,\frac{1}{a_n}$ 成等差数列，求证

$$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n=(n-1)a_1a_n$$

**分析**　条件是 $\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k-1}}=d(k=2,3,\cdots)$，求证式中是积 $a_{k-1}a_k$ 的求和问题，故首先应从条件式中构造出 $a_{k-1}a_k$ 来. 另外为了使用拆差求和法，应将 $a_{k-1}a_k$ 变为“差”的形式.

**证明**　由等差数列的定义可得

$$\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k-1}}=d \tag{6}$$

由此可得

$$a_{k-1}a_k=\frac{1}{d}(a_{k-1}-a_k) \tag{7}$$

其中 $d$ 是数列 $\left\{\dfrac{1}{a_k}\right\}$ 的公差. 在式(7)中,令 $k=2,3,\cdots,n$,则得

$$a_1a_2=\frac{1}{d}(a_1-a_2)$$

$$a_2a_3=\frac{1}{d}(a_2-a_3)$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1}a_n=\frac{1}{d}(a_{n-1}-a_n)$$

上述 $n-1$ 个等式相加即得

$$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n=\frac{1}{d}(a_1-a_n)$$

但右边的表达式还不是求证式中的右边.

这里的是 $a_1$ 与 $a_n$ 的差,求证式右边是它们的积.

这个差异迫使我们需要找到 $a_1$ 与 $a_n$ 之间的关系式. 因为 $\left\{\dfrac{1}{a_k}\right\}$ 是以 $d$ 为公差的等差数列,这样就有 $\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_1}=(n-1)d$,通分变形后我们即推得 $a_1,a_n$ 的差变为它们的积

$$\frac{1}{d}(a_1-a_n)=(n-1)a_1a_n$$

最后达到了我们的目标

$$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n=(n-1)a_1a_n$$

**例 11** 若一个数列的首项 $a_1=a$,并且对一切 $n\in\mathbf{N}$,$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n+1}$,求证:$a_n=\dfrac{a}{n!}$.

**证明** 因为

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{n+1}$$

让 $n=2,3,\cdots,n$ 得

$$a_2=\frac{a_1}{2},a_3=\frac{a_2}{3},\cdots,a_n=\frac{a_{n-1}}{n}$$

上面 $n-1$ 个等式相乘，约去左边和右边的公因子得

$$a_n=\frac{a_1}{n!}=\frac{a}{n!}$$

**例 12**　数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=3$，对 $n>1$ 有 $b_n=b_{n-1}+2n+2$，求证：$b_n=n^2+3n-1$.

**证明**

$$b_2=b_1+2\cdot 2+2$$

$$b_3=b_2+2\cdot 3+2$$

$$\vdots$$

$$b_n=b_{n-1}+2n+2$$

上面 $n-1$ 个等式相加得

$$\begin{aligned}b_n=&b_1+2(2+3+\cdots+n)+2(n-1)=\\&3+(n-1)(n+2)+2(n-1)=\\&3+n^2+n-2+2n-2=\\&n^2+3n-1\end{aligned}$$

**例 13**　已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_2=2$，对 $n>2$ 时，$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$，求证

$$a_n=2+\frac{1}{3}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}-1\right]\quad (n\in\mathbf{N})$$

**证明**　因为

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$$

所以

$$a_n-a_{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)(a_{n-1}-a_{n-2})\quad (n>2)\qquad (8)$$

在式(8)中让 $n=2,3,\cdots,n$ 得

$$a_3-a_2=\left(-\frac{1}{2}\right)(a_2-a_1)$$

$$a_4-a_3=\left(-\frac{1}{2}\right)(a_3-a_2)$$

$$\vdots$$

$$a_n-a_{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)(a_{n-1}-a_{n-2})$$

上面 $n-2$ 个等式相乘，相约左右的公因式得

$$a_n-a_{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(a_2-a_1)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\quad(n>2)\tag{9}$$

在式(9)中让 $n=3,4,\cdots,n$ 得

$$a_3-a_2=\left(-\frac{1}{2}\right)^1$$

$$a_4-a_3=\left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$a_n-a_{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

上面 $n-2$ 个等式相加得

$$a_n-a_2=\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}=$$

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=$$

$$\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]=$$

$$\frac{1}{3}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}-1\right]\tag{10}$$

所以

$$a_n=2+\frac{1}{3}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}-1\right]\quad(n>2)\qquad(11)$$

当 $n=1$ 时，有

$$\text{式(11)右边}=2+\frac{1}{3}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}-1\right]=2-1=1$$

当 $n=2$ 时，有

$$\text{式(11)右边}=2+\frac{1}{3}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{0}-1\right]=2$$

它们与初始条件 $a_1=1, a_2=2$ 不谋而合

故对 $n\in\mathbf{N}$ 总有

$$a_n=2+\frac{1}{3}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}-1\right]$$

**例 14**　设 $a_1,\cdots,a_n$ 成等差数列，求证

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$$

**证明**　(拆差求和)

记 $a_1,\cdots,a_n$ 的公差为 $d$，则分母有理化每个分式后

$$\text{左边}=\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{a_1-a_2}+\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{a_2-a_3}+\cdots+\frac{\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}}{a_{n-1}-a_n}=$$

$$-\frac{1}{d}(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}+\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}+\cdots+\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n})=$$

$$-\frac{1}{d}(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n})=-\frac{1}{d}\cdot\frac{a_1-a_n}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}=$$

$$-\frac{1}{d}\cdot\frac{-(n-1)d}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$$

**例 15** 求证

$$m!+\frac{(m+1)!}{1!}+\frac{(m+2)!}{2!}+\cdots+\frac{(m+n)!}{n!}=$$

$$\frac{(m+n+1)!}{(m+1)n!}$$

**证明** （拆差求和法）

$$m!+\frac{(m+1)!}{1!}+\frac{(m+2)!}{2!}+\cdots+\frac{(m+n)!}{n!}=$$

$$m!(C_m^0+C_{m+1}^1+C_{m+2}^2+\cdots+C_{m+n}^n)$$

由组合数第二性质((§4)中公式(4))得

$$C_n^r=C_{n+1}^r-C_n^{r-1}$$

所以

$$C_{m+1}^1=C_{m+2}^1-C_{m+1}^0$$

$$C_{m+2}^2=C_{m+3}^2-C_{m+2}^1$$

$$C_{m+3}^3=C_{m+4}^3-C_{m+3}^2$$

$$\vdots$$

$$C_{m+n}^n=C_{m+n+1}^n-C_{m+n}^{n-1}$$

上面 $n$ 个等式相加，相消等式左右的同类项，化简得

$$C_{m+1}^1+C_{m+2}^2+\cdots+C_{m+n}^n=C_{m+n+1}^n-C_{m+1}^0$$

所以

$$C_m^0+C_{m+1}^1+C_{m+2}^2+\cdots+C_{m+n}^n=C_{m+n+1}^n$$

于是

$$m!+\frac{(m+1)!}{1!}+\frac{(m+2)!}{2!}+\cdots+\frac{(m+n)!}{n!}=$$

$$m!\ C_{m+n+1}^n=\frac{(m+n+1)!}{(m+1)n!}$$

**例 16** 数列的通项公式为 $a_n=\dfrac{n^2+3n+1}{(n+2)!}$，求证

$$\text{数列的前 } n \text{ 项和 } s_n=\frac{3}{2}-\frac{n+3}{(n+2)!}$$

**证明**　$a_n=\frac{(n+2)(n+1)-1}{(n+2)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+2)!}$

由此可得

$$a_1=\frac{1}{1!}-\frac{1}{3!}$$

$$a_2=\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}$$

$$a_3=\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1}=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$a_n=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+2)!}$$

上面 $n$ 个等式相加,相消等式右边的同类项后得

$$s_n=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}=$$

$$\frac{3}{2}-\frac{n+2+1}{(n+2)!}=\frac{3}{2}-\frac{n+3}{(n+2)!}$$

**例 17**　设 $n\in\mathbf{N}$,且 $s_p=1^p+2^p+\cdots+n^p$,已知

$$s_1=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$s_2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

求证:$s_3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

**证明**　因为

$$(n+1)^4=n^4+4n^3+6n^2+4n+1 \qquad (12)$$

故用 $1,2,\cdots,n$ 代替式(12)中的 $n$ 可得

$$2^4=1^4+4\times1^3+6\times1^2+4\times1+1$$

$$3^4=2^4+4\times2^3+6\times2^2+4\times2+1$$

$$4^3=3^4+4\times3^2+6\times3^2+4\times3+1$$

$$\vdots$$

$$(n+1)^4=n^4+4n^3+6n^2+4n+1$$

上面的 $n$ 个等式相加,消去等式左边和右边的同类项后得

$$(n+1)^4=1+4s_3+6s_2+4s_1+n$$

由此

$$\begin{aligned}4s_3&=(n+1)^4-(n+1)-6s_2-4s_1=\\&(n+1)^4-(n+1)-n(n+1)(2n+1)-\\&2n(n+1)=\\&(n+1)[(n+1)^3-1-2n^2-n-2n]=\\&(n+1)(n^3+n^2)=n^2(n+1)^2\end{aligned}$$

所以

$$s_3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

**例 18** 求证:通项公式为 $a_n=n^2-5n+6$ 的数列的前 $n$ 项和 $s_n=\frac{n}{3}(n^2-6n+11)$.

**证明** 
$$\begin{aligned}s_n&=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(k^2-5k+6)=\\&\sum_{k=1}^{n}k^2-5\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}6=\\&s_2-5s_1+6n=\\&\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\\&5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+6n=\\&\frac{1}{6}n[2n^2+3n+1-15n-15+36]=\end{aligned}$$

$$\frac{1}{6}n(2n^2-12n+22)=$$

$$\frac{1}{3}n(n^2-6n+11)$$

## 练习题

1. 设 $a,b,c$ 成等比数列，求证

$$(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$$

2. 设 $a,b,c,d$ 成等比数列，求证

$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$$

3. 若 $\log_k x,\log_m x,\log_n x$ 成等差数列，求证

$$n^2=(kn)^{\log_n^m}\quad（其中\ x\neq 1）$$

4. 若 $a,b,c$ 分别是同一个等比数列的第 $k,n,p$ 项，求证：$\left(\frac{a}{b}\right)^{k-p}=\left(\frac{a}{c}\right)^{k-n}$.

5. $s_n$ 表示等差数列的前 $n$ 项之和，求证

$$s_{n+3}-s_n=3(s_{n+2}-s_{n+1})$$

6. $s_n$ 表示等差数列的前 $n$ 项之和，且 $s_n=k,s_k=n$，求证

$$s_{n+k}=-(k+n);s_{k-n}=(k-n)\left(1+\frac{2n}{k}\right),(k>n)$$

7. 设　$s_1=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}$

$$s_2=a+aq^{-1}+aq^{-2}+\cdots+aq^{-(n-1)}$$

求证：$as_1=a_ns_2$（其中 $a_n=aq^{n-1}$）.

8. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_n=3a_{n-1}+2(n\geqslant 2)$，求证

$$a_n=\frac{3^n+3^{n-1}-2}{2}$$

9.数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$分别定义如下($n\geqslant 1$)

$$x_1=1, x_2=1, x_{n+2}=x_{n+1}+2x_n$$

$$y_1=1, y_2=7, y_{n+2}=2y_{n+1}+3y_n$$

求证:$x_n=\dfrac{2^{n+2}+(-1)^{n+1}}{3}$;$y_n=2\cdot 3^{n+1}+(-1)^n$.

10.求证:

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$;

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

11.求证:

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$;

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

12.求证

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)!}$$

13.利用

$$(n+1)^5=n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1$$

证明

$$s_4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

其中 $s_4=1^4+2^4+\cdots+n^4$.

14.求证:

(1)$2^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\dfrac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$;

(2)$1^2+3^2+\cdots+(2n+1)^2=\dfrac{1}{3}(n+1)(2n+1)\cdot$
$(2n+3)$.

15. 记 $R_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一切可能的两两乘积之和. 求证

$$R_n=\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)$$

(提示：$s_1^2=s_2+2R_n$)

16. 求证：

(1) $9+99+999+\cdots+\underbrace{99\cdots9}_{n个}=\frac{1}{9}(10^{n+1}-9n-10)$.

(2) $5+55+555+\cdots+\underbrace{55\cdots5}_{n个}=\frac{5}{81}(10^{n+1}-9n-10)$.

$\left(提示\ 55\cdots5=\frac{5}{9}(10^n-1)\right)$

17. 求证：$\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2n位}-\underbrace{22\cdots2}_{n位}}=\underbrace{33\cdots3}_{n位}$.

18. 求证：$1-3+5-7+\cdots+(-1)^{n-1}(2n-1)=(-1)^n n$.

# 后　记

关于等式证明问题，这在数学中并没有一章做专门的论述，但是等式的证明却渗透于初等数学及高等数学的每一个内容之中，它是数学的内容、方法及意义的一个有机的细胞.它是如此之基本与重要，如果数学中的任何一个分支抛弃了它，则数学的这一部分的内容就会变得残缺不全，乃至毫无生气.因此，学会等式证明的思想方法，实在是学好数学的一把钥匙.无须举许多例子，仅以1982年全国理科高考试卷中的第八题为例.

**试题**　抛物线 $y^2=2px$ 的内接三角形有两边与抛物线 $x^2=2qy$ 相切，证明：这个三角形的第三边也与

$x^2=2qy$ 相切.

关于这个试题的证明方法不下于十种，我们就以最简单的一种证明方法为例.

不失一般性，设 $p>0$，$q>0$；又设 $y^2=2px$ 的内接三角形顶点为 $A_1(x_1,y_1)$，$A_2(x_2,y_2)$，$A_3(x_3,y_3)$. 因此 $y_1^2=2px_1$，$y_2^2=2px_2$，$y_3^2=2px_3$，其中 $y_1\neq y_2$，$y_2\neq y_3$，$y_3\neq y_1$.

依题意，设 $A_1A_2$ 和 $A_2A_3$ 与抛物线 $x^2=2qy$ 相切，要证 $A_3A_1$ 也与抛物线 $x^2=2qy$ 相切.

因为 $x^2=2qy$ 在原点 $O$ 处的切线是 $y^2=2px$ 的对称轴，所以原点 $O$ 不能是所设的内接三角形的顶点，即 $(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$，$(x_2,y_3)$ 都不能是 $(0,0)$.

要证明本试题，首先获得如下命题.

**命题**　经过 $y^2=2px$ 上两点 $A_1(x_1,y_1)$，$A_2(x_2,y_2)$ 的直线 $A_1A_2$ 与抛物线 $x^2=2qy$ 相切的充要条件是

$$2p^2q+y_1y_2(y_1+y_2)=0$$

关于这个命题的证明在此省略了.

因为 $A_1A_2$ 与 $A_2A_3$ 与 $x^2=2qy$ 相切，所以有

$$2p^2q+y_1y_2(y_1+y_2)=0 \tag{1}$$

$$2p^2q+y_2y_3(y_2+y_3)=0 \tag{2}$$

而要证 $A_3A_1$ 与 $x^2=2qy$ 也相切，只需证明

$$2p^2q+y_3y_1(y_3+y_1)=0 \tag{3}$$

即可. 由此一个解析几何的证明题就转化为一个代数条件等式的证明题了，也就是在条件式(1)，(2)成立时，求证等式(3)也成立. 在评卷中可以发现，不少学生由式(1)，(2)不知如何才能推证出式(3)

来.其实这是一个很容易证明的条件等式证明题.“按图索骥”,分析条件式与求证式之间的差异,就可以发现条件式(1),(2)中有 $y_2$,而求证式(3)中没有 $y_2$,故只需利用(1),(2)消去 $y_2$,获得一个只含 $y_3$,$y_1$ 的等式,经过整理即可得到式(3).从而证明了试题八.

综上所述,我们认为用唯物辩证法去揭示等式证明的本质,不是用题海,而是用规律性的东西去充实中学生,乃是当今中学数学教学的当务之急,但愿这本小书也能使广大中学生得到相当的好处,既学得省力,又学得生动、活泼、主动!

最后,我们声明《三角等式证题法》的“后记”中的最后一点说明,仍然适用于本书.

作者

**2015 年 1 月 1 日**